12. évfolyam Háziverseny I. forduló 2017. január

Teljes pontszám csak az alaposan és érthetően indokolt megoldásokért jár. Minden feladat megoldását külön A5-ös méretű lapra írd! Akárhány feladat megoldását be lehet adni, de a pontversenybe csak **a négy legmagasabb pontszámot elért feladat** fog beszámítani. Az Árpád Napokon megrendezésre kerülő **II. fordulóban** azok indulhatnak majd, akik ebben a fordulóban eredményesen szerepeltek. **Beadási határidő:** 2017. február 10.

I. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 6 cm, magassága és testátlója is egész szám és tudjuk, hogy a testátló hossza nem prímszám. Számítsuk ki a hasáb térfogatát!

(7 pont)

II. Igazoljuk (elektronikus segédeszközök használata nélkül), hogy $\log_{2015}2016 > \log_{2016}2017$

(8 pont)

III. Oldjuk meg az $x!(y!+1)=(x+y)!+1$ egyenletet a nemnegatív egész számpárok halmazán!

(5 pont)

IV. Hány olyan pozitív négyjegyű szám van, amelyben a prím számjegyek száma prímszám?

(6 pont)

V. Egy négyzet két csúcsa az $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ és az $y=-|x+3|+7$ egyenlettel megadott alakzatok közös pontja. Adjuk meg a négyzet területét!

(6 pont)

VI. Felírtunk egy pozitív egész számot a táblára, ami 100 000-nél kisebb. Erről 12 diák a következőt állítja: az első diák szerint ez a szám 2-nek többszöröse, a második szerint a 3-nak többszöröse és így tovább, a tizenkettedik diák szerint a 13-nak többszöröse. Tudjuk, hogy két diák kivételével mindenki igazat mondott, és ezek ketten pontosan egymás után következnek. Melyik szám áll a táblán?

(4 pont)

VII. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcsa, amelybe összefutó élekkel, mint oldalakkal lehet háromszöget szerkeszteni!

(5 pont)

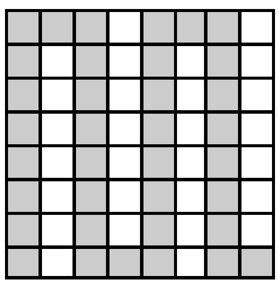
VIII. Az *ABCD* négyzetben legyen *E* az *AB* oldal *A*-hoz közelebbi harmadoló pontja, *F* a *BC* oldal felezési pontja. Igazoljuk, hogy a *D* csúcsból az *AE* és *BF* szakaszok ugyanakkora szög alatt látszanak!

(4 pont)

IX. Ismeretes, hogy $35!=10333147966386144929ab66513375232000000000$. Határozzuk meg (elektronikus segédeszközök használata nélkül), hogy milyen számjegy állhat *a* és *b* helyén?

(4 pont)

X. Az ábra szerint egy 8×8-as táblán befestettünk 36 egységnyi négyzetet a következő szabály szerint: minden következő befestendő kis négyzetnek pontosan egy oldala érintkezik a közvetlenül azelőtt befestett kis négyzet valamelyik oldalával, de nem érintkezik oldal mentén a korábban befestett négyzetek egyikével sem.



Készítsetek egy 8×8-as táblán olyan befestést, amely megfelel a leírt szabálynak, és amelyen a befestett négyzetek száma minél nagyobb!
(Pontozás: aki a legtöbb befestett négyzetet tartalmazó helyes ábrát készíti, az kapja a legtöbb pontot, ami *8 pont*!)