

Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny

2020. január 10.

A feladatok megoldása

1. feladat: Egy diáktalálkozón 19 tanuló vett részt. A találkozót követő napokban elkezdtek egymással levelezni, mindegyikük 2 vagy 4 levelet adott fel. Lehetséges-e, hogy mindegyikük pontosan 3 levelet kapott? (6 pont)

Megoldás:

Számoljuk meg, hány levelet küldtek, és hány levelet kaptak a diákok.

Mivel mindenki páros darabszámú levelet adott fel, így az összes feladott levél száma is páros.

2 pont

Ha mindenki 3 levelet kapott volna, akkor viszont $19 \cdot 3 = 57$ darab levelet küldtek volna egymásnak.

2 pont

Ugyanannyi levelet kaptak, mint ahányat küldtek; de 57 nem páros, ezért ez lehetetlen.

2 pont

Összesen: 6 pont

2. feladat: Egy hordó a $\frac{3}{4}$ részéig van megtöltve vízzel. Beletöltünk még 3 litert, így a $\frac{4}{5}$ részéig áll benne a víz. Hány litert kell még beletölteni a hordóba, ha azt akarjuk, hogy az $\frac{5}{6}$ részéig legyen megtöltve? (8 pont)

Megoldás:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20},$$

2 pont

ezért az $\frac{1}{20}$ rész térfogata pontosan 3 liter.

1 pont

Így a hordó $20 \cdot 3 = 60$ literes.

1 pont

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{1}{30},$$

2 pont

vagyis az $\frac{1}{30}$ rész a keresett mennyiség.

1 pont

Tehát $60 : 30 = 2$ liter vizet kell a hordóba tölteni.

1 pont

Összesen: 8 pont

3. feladat: Van egy 11 literes és egy 5 literes vödrünk, de más eszközünk nincs. A közelben lévő nagy tó tele van vízzel. Hogyan tudunk kimérni az egyik vödörbe pontosan 7 liter vizet?(9 pont)

Megoldás:

Telemerítjük a 11 literes vödröt.

1 pont

A 11 literes vödör tartalmából telítöljtük az 5 literes vödröt.

1 pont

Kiöntjük az 5 literes vödör tartalmát.

1 pont

A 11 literes vödör tartalmából újra telítöljtük az 5 literes vödröt.

1 pont

Megint kiöntjük az 5 literes vödör tartalmát.

1 pont

A 11 literes vödörben maradó 1 liter vizet átöntjük az 5 literes vödörbe.

1 pont

Újra telemerítjük a 11 literes vödröt.

1 pont

A 11 literes vödör tartalmából újra telítöljtük az 5 literes vödröt.

1 pont

Így a 11 literes vödörben pontosan 7 liter maradt.

1 pont

Összesen: 9 pont

4. feladat:

7 különböző színű béka nevezett be a békaügető versenyre. Lázás versengés után a 7 béka célba érkezett, holtverseny nem volt. A következőket tudjuk a végeredményről:

- (a) A piros béka több békát győzött le, mint ahányan őt legyőzték.
- (b) A zöld béka nem lett sem első, sem második.
- (c) A zöld és a piros béka valamilyen sorrendben közvetlenül egymás után végzett.
- (d) A sárga, a narancssárga és a rózsaszín béka páratlan sorszámú helyeken ért célba.
- (e) A kék béka jobb helyezést ért el a zöldnél.
- (f) A sárga béka nem volt benne az első háromban, és a lila békánál előrébb végzett.
- (g) A narancssárga béka a célban már hűsítővel várta a rózsaszín pajtását.

Milyen sorrendben érhettek célba?

(11 pont)

Megoldás:

Az (a) állításból következik, hogy a piros béka az 1-3. hely valamelyikén végzett.

1 pont

A (b) és a (c) állításból együtt következik, hogy: vagy a piros béka a 2. és a zöld a 3.; vagy a piros a 3. és a zöld a 4.

2 pont

Az eddigiekből és a (d) állításból következik, hogy a sárga, narancssárga és zöld béka valamilyen sorrendben az 1., az 5. és a 7. helyen végeztek.

2 pont

Az eddigiekből és az (f) állításból következik, hogy a sárga béka csak az 5. lehetett. (Nem lehet az 1. és nem lehet utolsó sem, mert legyőzte a lilát.)

2 pont

A (g) állításból következik, hogy a narancssárga béka lett az első és a rózsaszín béka az utolsó.

2 pont

Az (e) állításból és a piros, illetve a zöld béka lehetséges helyzetéből következik, hogy a 2., 3. és 4. helyen sorra a kék, piros és zöld béka végzett.

1 pont

Tehát a végleges sorrend:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
narancssárga	kék	piros	zöld	sárga	lila	rózsaszín

1 pont

Összesen: 11 pont**5. feladat:**

a) Rajzolj fel 6 egyenest úgy, hogy összesen 9 metszéspontjuk legyen, és mindegyik egyenesre három metszéspont essen!

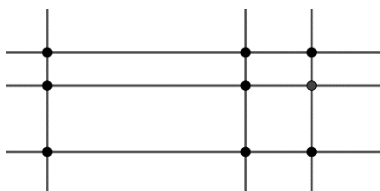
(5 pont)

b) Rajzolj fel 8 egyenest úgy, hogy összesen 9 metszéspontjuk legyen, és mindegyik egyenesre három metszéspont essen!

(7 pont)

Megoldás:

a) Egy lehetséges ábra:



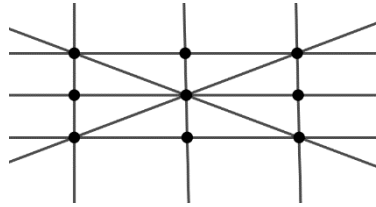
A 6 egyenesnek 9 metszéspontja van.

2 pont

Minden egyenesre 3 metszéspont esik.

3 pont

b) Egy lehetséges ábra:



A 8 egyenesnek 9 metszéspontja van.

3 pont

Minden egyenesre 3 metszéspont esik.

4 pont

Összesen: 12 pont

6. Hány olyan háromjegyű, páros szám van, amelyikben van 8-as számjegy, de nincs 4-es számjegy?

(14 pont)

Első megoldás:

Mivel a szám páros és nincs benne 4-es, ezért az utolsó számjegye csak 0, 2, 6 vagy 8 lehet.

2 pont

Ha az utolsó számjegye 0, akkor a 8 vagy az első helyen áll, ekkor a középső számjegyre 9 lehetőség van; vagy a második helyen áll, ekkor az első számjegyre 8 lehetőség van; viszont a 880 kétszer lett számolva, így $9+8-1=16$ lehetőség van.

3 pont

Ha az utolsó számjegye 2, akkor a 8 vagy az első helyen áll, ekkor a középső számjegyre 9 lehetőség van; vagy a második helyen áll, ekkor az első számjegyre 8 lehetőség van; viszont a 882-t kétszer lett számoltik, így $9+8-1=16$ lehetőség van.

2 pont

Ha az utolsó számjegye 6, akkor a 8 vagy az első helyen áll, ekkor a középső számjegyre 9 lehetőség van; vagy a második helyen áll, ekkor az első számjegyre 8 lehetőség van; viszont a 886 kétszer lett számolva, így $9+8-1=16$ lehetőség van.

2 pont

Ha az utolsó számjegye 8, akkor az első számjegyre 8, a második számjegyre 9 lehetőség van; így ebben az esetben összesen $8 \cdot 9 = 72$ lehetőség van.

3 pont

Így összesen $16+16+16+72 = 120$ db megfelelő háromjegyű szám.

2 pont

Összesen: 14 pont

Második megoldás:

A 8-as számjegyek darabszáma lehet 1; 2 vagy 3.

1 pont

Ha a számban **3 db 8-as** számjegy van: ez a 888, azaz **1 eset**.

1 pont

Ha a számban **2 db 8-as** számjegy van:

ha ez az első két helyen, ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet; azaz 3 eset

2 pont

ha az első és az utolsó helyen; ekkor a középső számjegyre 8 lehetőség van; azaz 8 eset

1 pont

ha az utolsó két helyen; ekkor az első számjegyre 7 lehetőség van; azaz 7 eset van.

1 pont

Így összesen $3+8+7=$ **18 eset**

1 pont

Ha a számban **1 db 8-as** számjegy van:

ha ez az első helyen; ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet;

a középső számjegyre pedig 8 lehetőség; azaz $3 \cdot 8=$ 24 eset

1 pont

ha a középső helyen; ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet;

az első számjegyre pedig 7 lehetőség; azaz $3 \cdot 7=$ 21 eset;

2 pont

ha az utolsó helyen; ekkor az első számjegyre 7, a második számjegyre 8 lehetőség adódik; így ebben az esetben összesen $7 \cdot 8=$ 56 lehetőség van.

1 pont

Így összesen $24+21+56=$ **101 eset**

1 pont

Így összesen $1+18+101 =$ **120 db** megfelelő háromjegyű szám.

2 pont

Összesen: 14 pont