

Az érettségiről érdekesen

Csapodi Csaba

ELTE TTK, Budapest

Koncz Levente

Óbudai Árpád Gimnázium, Budapest

Rátz László Vándorgyűlés

2018. július 4.

Amiről szó lesz

1. A matematikaérettségi prediktív validitása
2. Egy feladat evolúciója
3. A matematikaérettségi eredményessége az önkéntes adatszolgáltatás alapján (2018)

A matematikaérettségi prediktív validitása

- Mi az a „prediktív validitás”?
 - 2005 óta az érettségi vizsga egyik funkciója a felsőoktatásba való belépés meghatározása.
 - Korábbi kutatások ennek a funkciónak a teljesülését nem vizsgálták.
 - A fő kérdés: lehet-e a matematika érettségi vizsga szintjéből és százalékos eredményéből következtetni az egyetemi teljesítményre?

A matematikaérettségi prediktív validitása

- A kutatás
 - „Alapanyag”: az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika BSc és matematika tanárszakos hallgatói, akik 2017 szeptemberében kezdték meg a tanulmányaikat.
 - Újdonság: nem csak az egyetemi oktatás megkezdése előtti ún. kritériumdolgozat eredményét, hanem az egyetemen töltött első félév eredményeit is összevetettük az érettségi vizsga szintjével és eredményével.
 - Az adatgyűjtés nehézségei.
- Legfőbb segítő: Jantner Anna, ELTE TTK matematika-kémia tanárszakos hallgató

A matematikaérettségi prediktív validitása

- Az adatgyűjtés
 - Érettségi eredmények: önkéntes bevallás alapján
 - Kritérium dolgozatok eredményei: Módszertani Központtól
 - Félévi jegyek: Neptunból
- Pre-GDPR, de önkéntes nyilatkozatok vannak, félévi jegyek esetében nálunk csak az érettségi eredmények és a jegyek, név nélkül

A matematikaérettségi prediktív validitása

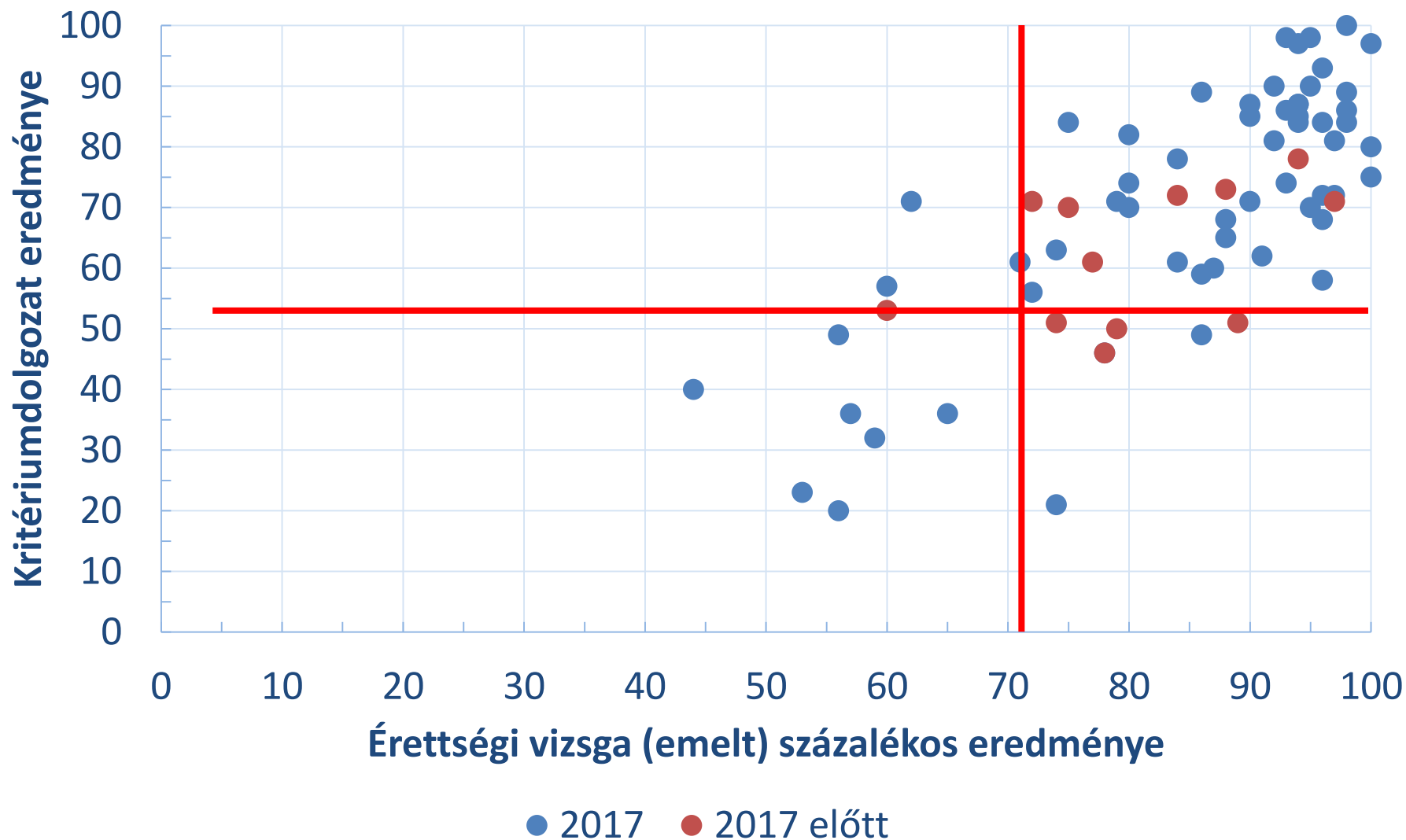
- **Néhány átfogó adat**

- Mindkét szakon kb. az országosan felvettek 50%-a jár az ELTE-re
- Településtípus alapján vegyes eloszlás
- Felmérésben részt vevők érettségi szintje és éve

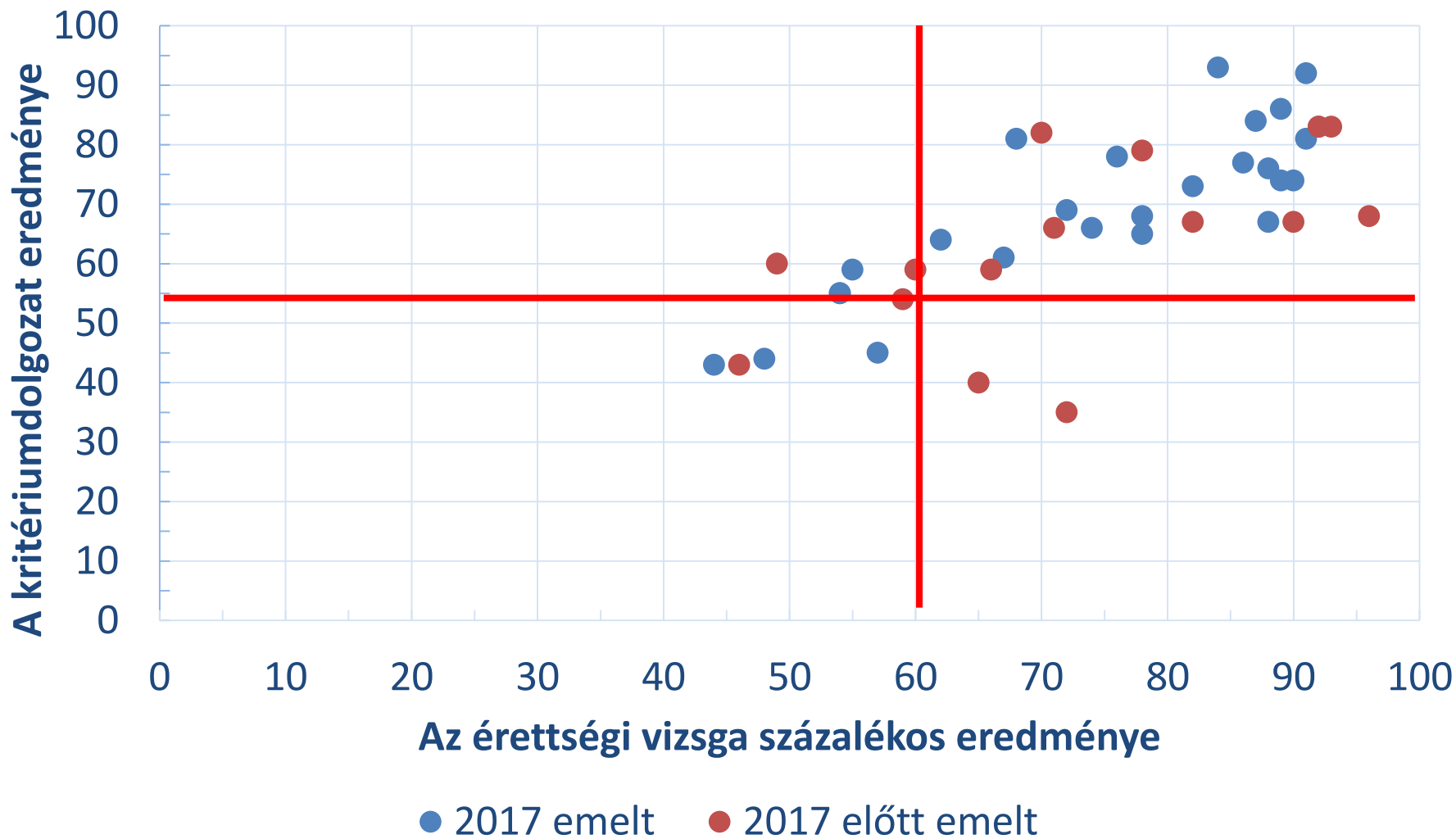
BSc	2017-ben	2017 előtt
Emelt szinten érettségizett (fő)	58	12

Tanárszak	2017-ben	2017 előtt
Középszinten érettségizett (fő)	33	11
Emelt szinten érettségizett (fő)	30	16

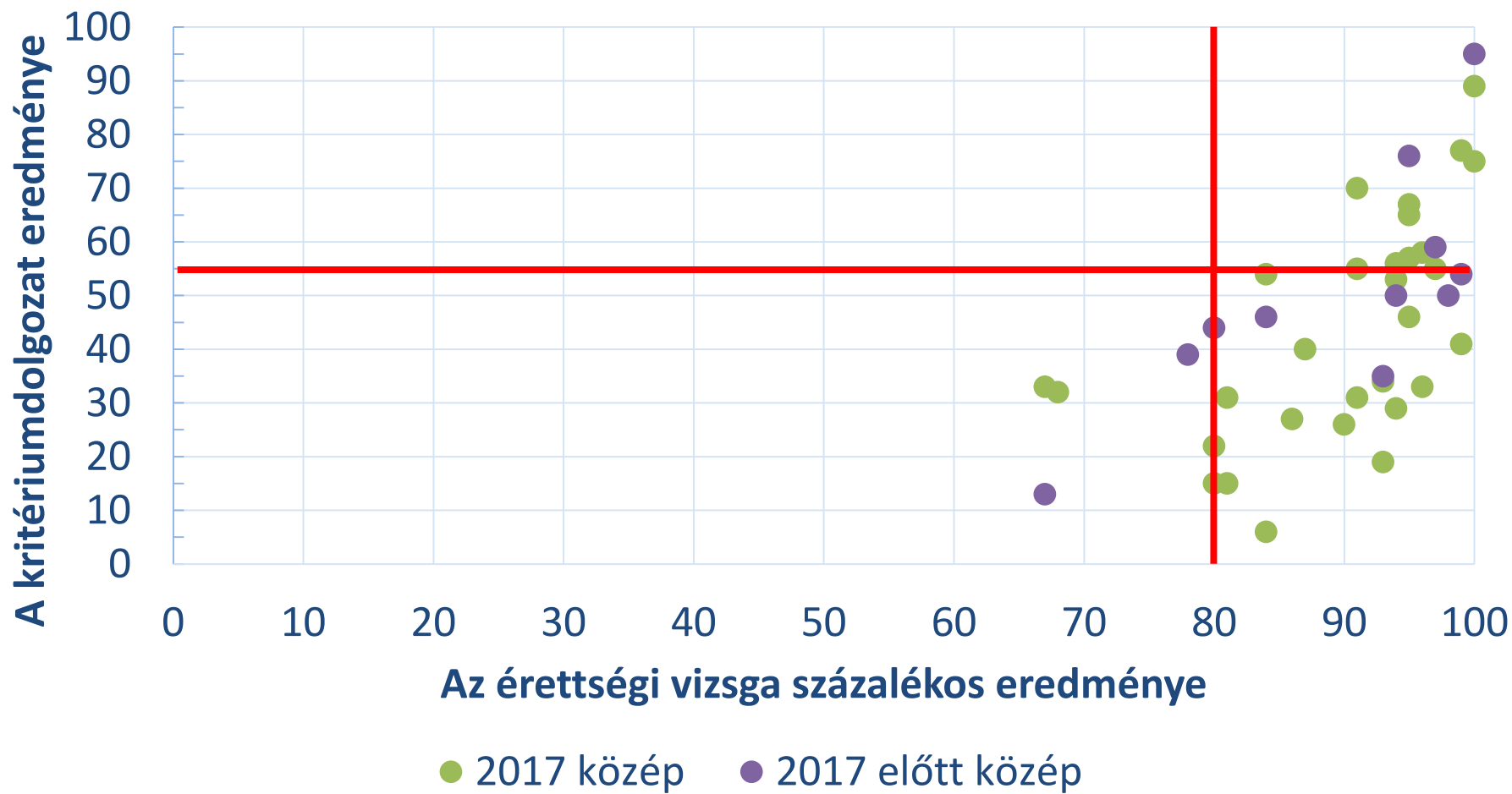
Érettségi vizsga – (első) kritérium dolgozat – BSc



Érettségi vizsga – (első) kritérium dolgozat – tanár emelt



Érettségi vizsga – (első) kritérium dolgozat – tanár közép



Érettségi vizsga – féléves eredmények

A vizsgált tantárgyak

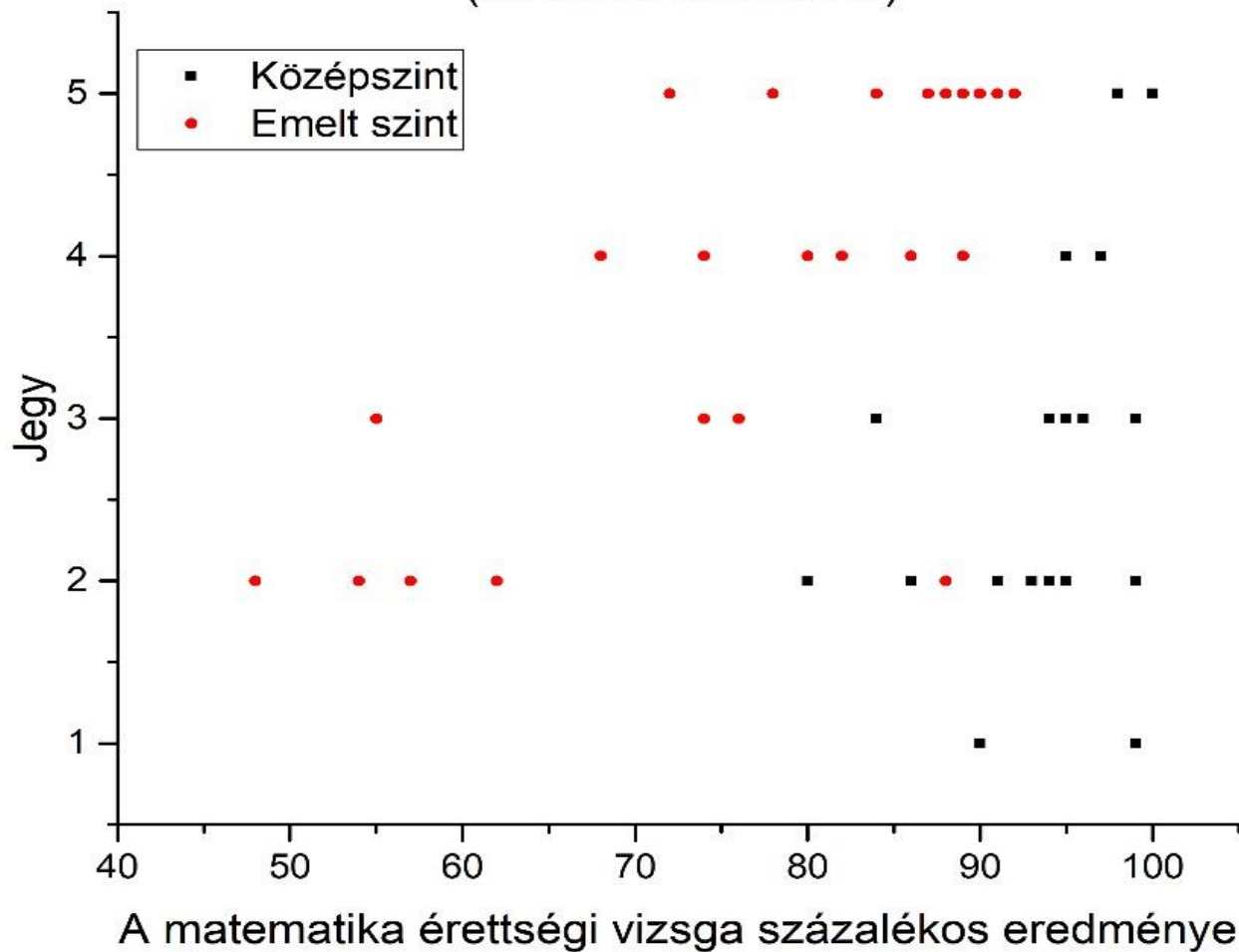
Osztatlan tanárszak: Algebra és számelmélet előadás, Bevezető analízis 1 gyakorlat, Véges matematika előadás
Matematika alapszak: Algebra 1 előadás és gyakorlat, Számelmélet 1 előadás és gyakorlat, Véges matematika 1 előadás és gyakorlat, valamint a választott tárgyak közül az Analízis gyakorlaton szerzett jegyeket tekintettük.

Dilemmák

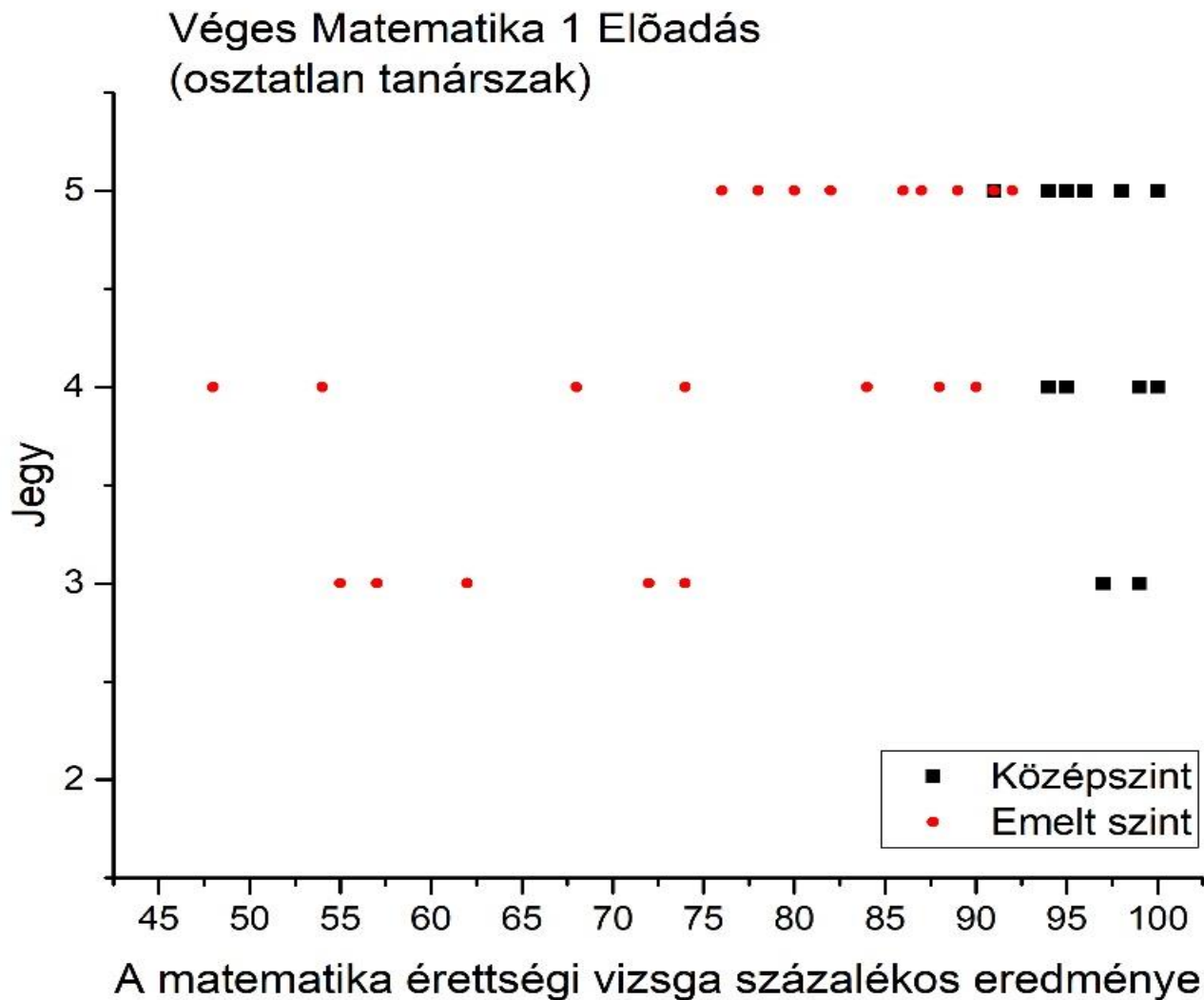
- Több szinten felvehető tárgyak eredményének kezelése
- A különböző módon nem teljesítők kezelése

Érettségi vizsga – féléves eredmények

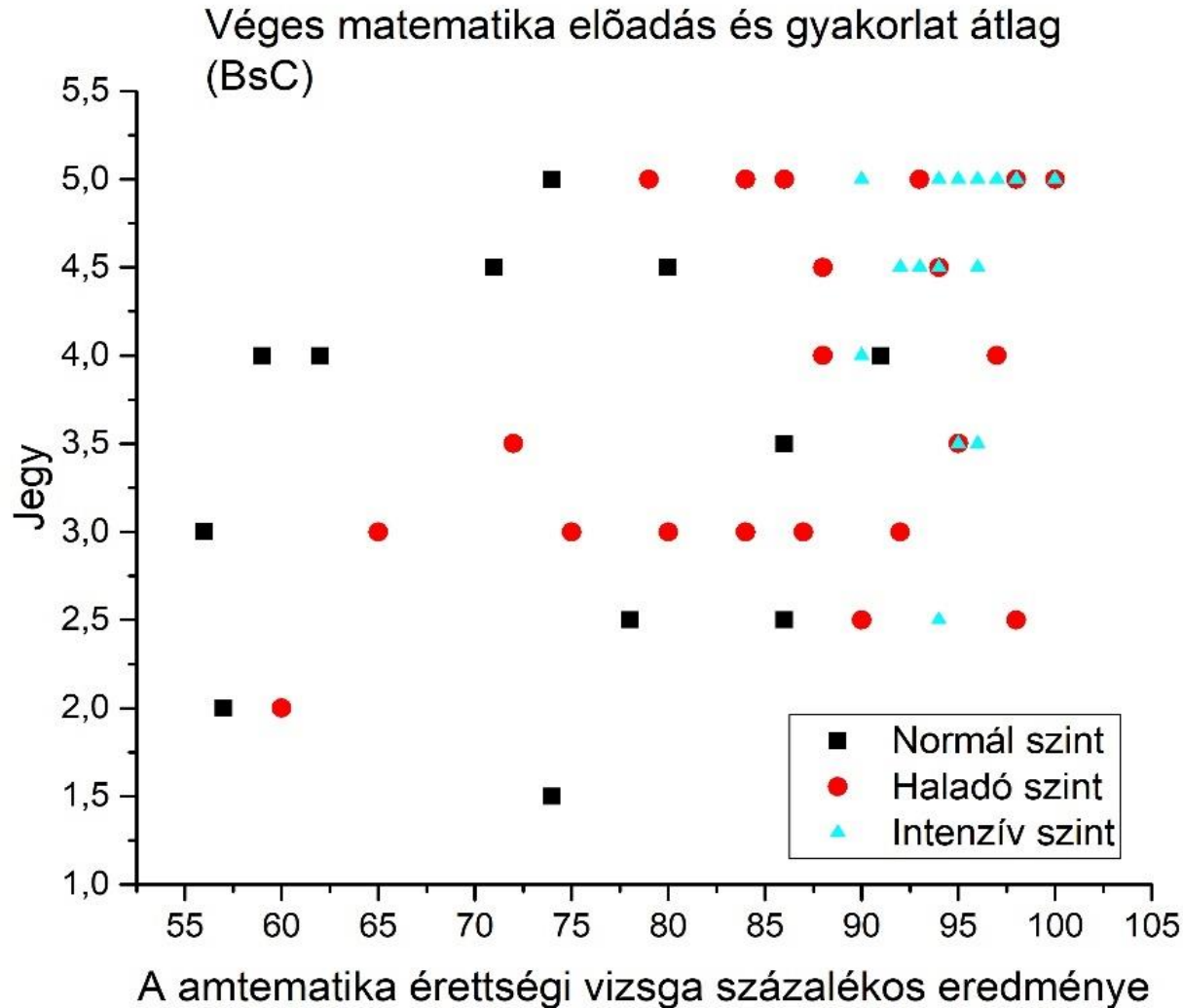
Bevezető Analízis 1 Gyakorlat
(osztatlan tanárszak)



Érettségi vizsga – féléves eredmények



Érettségi vizsga – féléves eredmények



A matematikaérettségi prediktív validitása

- A legfontosabb megállapítások
 - Az emelt szintű matematika érettségi eredménye jól jelzi előre az egyetemi teljesítményt.
 - A középszintű matematika érettségi prediktív validitása alacsony.
 - A Véges matematika tantárgy eredménye kevésbé függ a matematika érettségi vizsga eredményétől, mint a többi tárgy esetében, ez a BSc szakos és a tanárszakos hallgatóknál egyaránt megfigyelhető.
- Javaslat: szükség lenne emelt szintű matematika érettségi vizsgát előírni a tanárszakosok számára is.

Egy feladat evolúciója – középszint

14. Az $ABCD$ derékszögű trapézban A és D csúcsnál van derékszög. Az AB alap 8 cm , a BC szár 6 cm , a CD alap 5 cm hosszúságú.

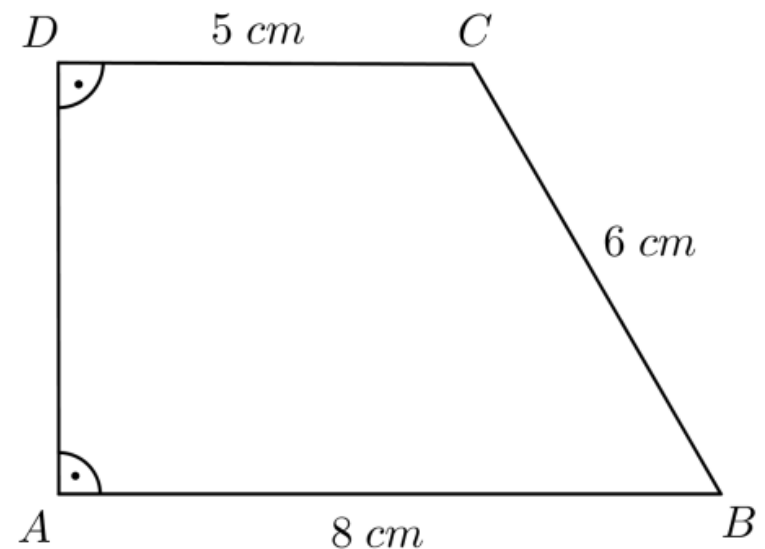
- Mutassa meg**, hogy a trapéz B csúcsánál lévő szög nagysága 60° !
- Hány cm^2 a trapéz területe?
- Számítsa ki az **ACB szög** nagyságát!

Dilemma1:

- és b) összefüggése, ha már az a) megoldása során Pitagorasz-tétellel dolgozik a vizsgázó

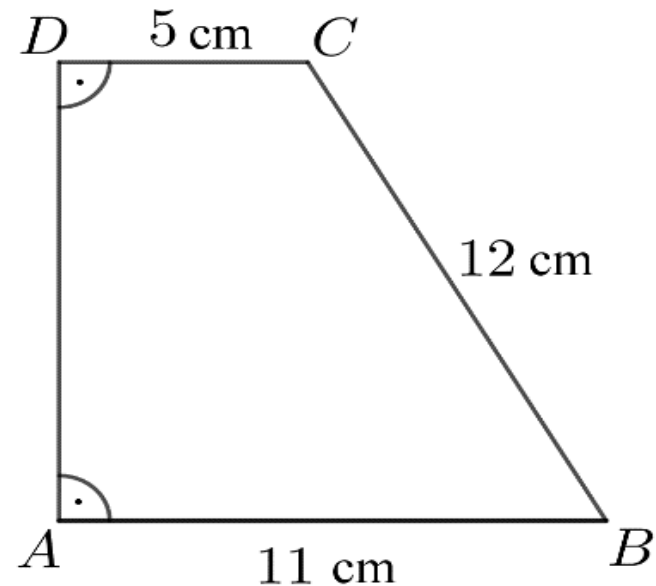
Feloldás:

- és b) összevonása



Egy feladat evolúciója – középszint

Dilemma 2: az ABC háromszögben az AB oldal a leghosszabb, így az AC ($\approx 7,2$ cm) kiszámítása után szinusz-tételt alkalmazva több esetet kellene vizsgálnia annak, aki így dolgozik.



Feloldás:

trapéz oldalhosszainak megváltoztatása

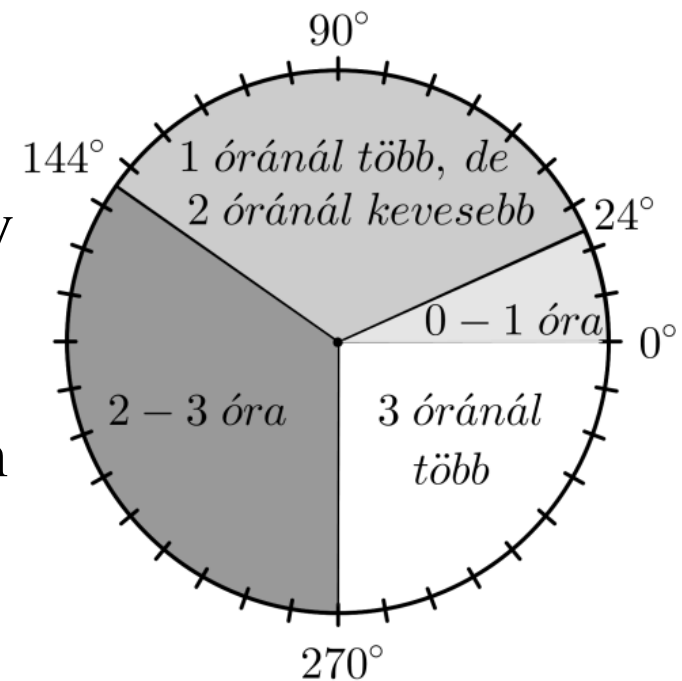
$AC \approx 11,5$ cm

Mivel így az ACB szög nem a legnagyobb oldallal szemközti szög, így csak hegyesszög lehet.

Egy feladat evolúciója – középszint

18. Egy informatika tagozatos, 30 fős osztályban felmérést készítettek a diákok internetezési szokásairól.

- a) Egy egyik kérdés az volt, hogy ki hány órát használja az internetet szabadidejében. A válaszok alapján az alábbi kördiagram készült. Hány olyan diák van, aki naponta legalább 2 órát használja az internetet a szabadidejében?



Válasz: $(360^\circ - 144^\circ) : 12^\circ = 18$ fő

Mi a hiba?

Egy feladat evolúciója – középszint

Miért nem tűztük ki a következő feladatot:

Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, melynek minden számjegye egyenlő és osztható 12-vel?

Egy feladat evolúciója – emelt szint

1. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya $3:4:5$.

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121,5 \text{ cm}^2$.
Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

(5+5+3 pont)

Egy feladat evolúciója – emelt szint

1.0

2. Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 6 cm és 7 cm.
- a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!
 - b) Valami **geometriai valószínűség** a háromszögben.
 - c) Megforgatjuk valahogy a háromszöget, **térfogatszámítás**.
- (3+4+6 pont)

Észrevételek:

- többet ér
- nehéz (még a II. részbe is sok így)
- c) függ a b)-től

Egy feladat evolúciója – emelt szint

2.0

1. Egy háromszög oldalainak hossza **5** cm, **6** cm és **7** cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja. A területe $121,5 \text{ cm}^2$.

b) Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

(**5+8** pont)

Észrevételek:

- A b) így túl nehéz (Melyik tagot jelölik a -val? Hogy számolják a területet?) és összetett, aki nem tud elindulni...
- Áruljuk el d -t (nem kell T)? Szedjük ketté?

Egy feladat evolúciója – emelt szint

1. Egy háromszög oldalainak hossza **7** cm, **9** cm és **11** cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya $3:4:5$.

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121,5 \text{ cm}^2$.
Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

*(**5+5+3** pont)*

Egy feladat evolúciója – emelt szint

Útmutató 1.0

Elegendő megmutatni, hogy a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög. *(1 pont)*

A legnagyobb szög a legnagyobb (11 cm hosszú) oldallal szemben van. *(1 pont)*

(...)

Mivel $0 < \cos \alpha < 1$, ezért α hegyesszög ($\alpha \approx 85,9^\circ$), tehát a háromszög valóban hegyesszögű. *(1 pont)*

Észrevételek:

- Az első két mondatot nem fogják így leírni.
- Az utolsó mondatot nem így fogják leírni.
- Hivatkozhatnak a Pitagorasz-tétel általánosítására is.

Egy feladat evolúciója – emelt szint

Útmutató 2.0

(Elegendő megmutatni, hogy a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.) A legnagyobb szög a legnagyobb (11 cm hosszú) oldallal szemben van. (2 pont)

(...)

$\alpha \approx 85,9^\circ$, tehát a háromszög valóban hegyesszögű. (1 pont)

Jobb oldalra: Mivel $0 < \cos \alpha < 1$, ezért α hegyesszög. (1 pont)

Megjegyzésbe: Ha a vizsgázó tanult tételként hivatkozik arra, hogy $a \leq b \leq c$ esetén a háromszög pontosan akkor hegyesszögű, ha $a^2 + b^2 > c^2$, akkor ezért 3 pontot kapjon. További 2 pont jár azért, ha a tételt a konkrét esetre alkalmazva belátja, hogy $7^2 + 9^2 > 11^2$ igaz, tehát a háromszög valóban hegyesszögű.

Egy feladat evolúciója – emelt szint

Útmutató 2.1

Mi kerüljön zárójelbe?

„Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.”

Mit kell leírni, mit nem?

Kettős szorítás: igényesség – életszerűség (114-es max)

Mértékegységek kérdése

Egy feladat evolúciója – emelt szint

Útmutató 2.1

Mi kerüljön zárójelbe?

Mivel $0 < \cos \alpha (< 1)$, ezért α hegyesszög.

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát $a - d$, a , $a + d$ ($0 < d < a$).

A Pitagorasz-tétel alapján $(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2$.

A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $a^2 = 4ad$.

($a \neq 0$ -val osztva) $a = 4d$.

A b -ben másodfokú egyenletet megoldva $b = 3d$ ($b = -d$ nem megoldás).

Innen $12d^2 = 243$, azaz ($d > 0$ miatt) $d = 4,5$.

Önkéntes adatszolgáltatás 2018

Idén először alkérdésenkénti (itemenkénti) adatgyűjtést (is) végeztünk.

Az iskolák választhattak, hogy **feladatonként** vagy **alkérdésenként** küldik az adatokat.

Az adatoknak középhalantén **53%**-át, emelt halantén **57%**-át alkérdésenként kaptuk meg.

Köszönjük!

Az alkérdésenként beérkezett adatok átlaga középhalantén **3%**-kal, emelt halantén **2,1%**-kal **magasabb**, mint a feladatonként beérkezett adatok átlaga.

A „jobb” iskolák kicsit hajlamosabbak voltak többet dolgozni.

Önkéntes adatszolgáltatás 2018

Június 29-ig	Középszint	Emelt szint
Összes magyar nyelven vizsgázó	kb. 66 000 fő	kb. 3200 fő
Beérkezett adat feladatonként	9180 fő	356 fő
Beérkezett adat alkérdésenként	10 349 fő	476 fő
Összesen	19 529 fő	832 fő
Beküldési arány	kb. 30%	kb. 26%

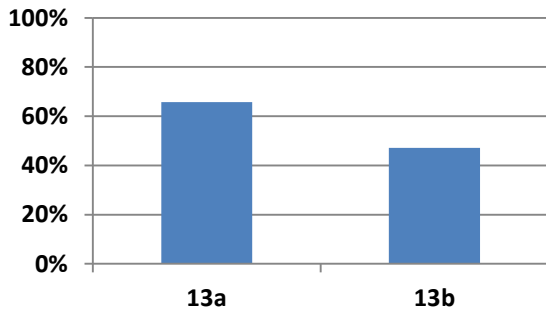
Középszint – összesítés

	2018	2017	2016	2015	2014	2013
I. rész	70%	61%	66%	56%	73%	57%
II.A rész	51%	54%	46%	40%	36%	42%
II.B rész	39%	45%	38%	39%	33%	44%
Teljes	52,8%	53,1%	49,2%	44,6%	46,2%	47,1%

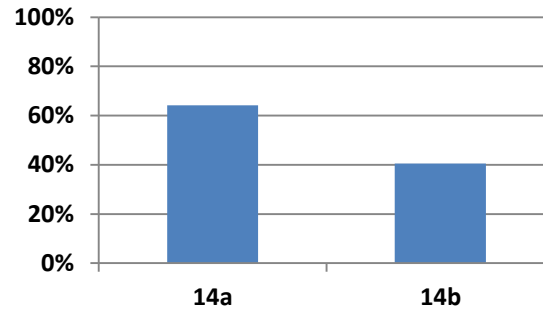
Középszint – részfeladatok

Könnyű – átlagos – nehéz?

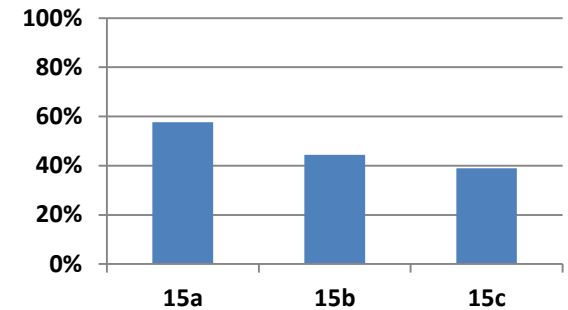
13. feladat



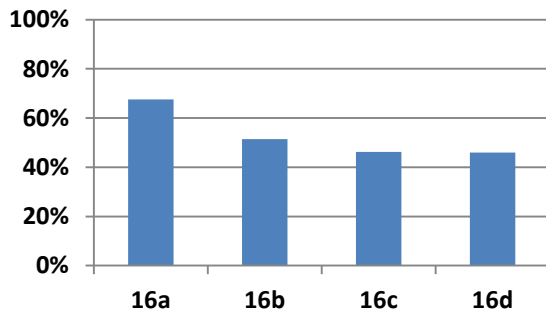
14. feladat



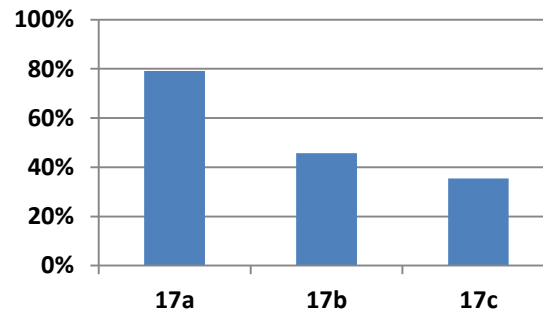
15. feladat



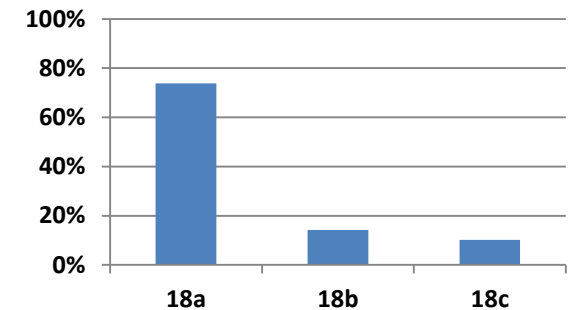
16. feladat



17. feladat



18. feladat



Középszint – a legjobban sikerült feladatok (II.AB)

17. Egy jégkrémgyártó üzem fagylalttölcsérekét rendel. A csonka-kúp alakú fagylalttölcsér belső méretei: felső átmérő 7 cm, alsó átmérő 4 cm, magasság 8 cm.

a) Számítsa ki, hogy a tölcsérbe legfeljebb hány cm^3 jégkrém fér el, ha a jégkrém – a csomagolás miatt – csak a felső perem síkjáig érhet! (3 p, 79%)

18. Egy 30 fős osztályban felmérést készítettek a diákok internetezési szokásairól. Az egyik kérdés az volt, hogy naponta átlagosan ki hány órát használja az internetet a szabadidejében. A válaszok alapján az itt látható kördiagram készült.

a) Hány olyan diák van az osztályban, aki naponta legalább 2 órát használja az internetet a szabadidejében? (3 p, 74%)

Középszint – a legjobban sikerült feladatok (II.AB)

16. Anna dominókészletében a dominókövek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken a pöttyök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet. A készletben minden lehetséges pöttyözésű dominóból pontosan egy darab van. Az ábrán a 2-6-os (6-2-es) dominó látható.

a) Hány olyan dominó van a készletben, amelyen a két részen lévő pöttyök számának szorzata prímszám? (4 p, 68%)

Középszint – a legkevésbé sikerült feladatok (II.AB)

18. A vezeték nélküli hálózati kapcsolatot létrehozó egységek (wifi routerek) 3%-a 2 éven belül meghibásodik (ezt úgy tekinthetjük, hogy 0,03 annak a valószínűsége, hogy egy készülék meghibásodik 2 év alatt). A meghibásodott eszközt garanciálisan kicserélik. Az iskola 20 ilyen eszközt vásárolt.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 2 év alatt legfeljebb egy hibásodik meg a vásárolt eszközök közül? (6 p, 10%)

b) Egy másik kérdés az volt, hogy a mobiltelefon, a laptop, illetve a táblagép (tablet) közül melyiket használják internetezésre. A mobiltelefont mind a 30-an, a laptopot 24-en, a táblagépet 16-an jelölték meg. A felmérésből az is kiderült, hogy a mobiltelefon, a laptop és a táblagép közül pontosan kétféle eszközt 14 diák használ. Hányan használják mind a háromféle eszközt internetezésre? (8 p, 14%)

Középszint – a legkevésbé sikerült feladatok (II.AB)

17. Egy fagyraltozóban hatféle ízű fagyalt kapható: vanília, csokoládé, puncs, eper, málna és dió. Andrea olyan háromgombócos fagyaltot szeretne venni tölcsérbe, amely kétféle ízű fagyaltból áll.

c) Hányféle különböző háromgombócos fagyaltot kérhet, ha számít a gombócok sorrendje is? (Például a dió-dió-vanília más kérésnek számít, mint a dió-vanília-dió.) (5 p, 35%)

Középszint – a nem választott feladat

Feladat	Megoldottság	Kihagyta	A kihagyók eredménye		
			a közös részben	a választható részben	összesen
K 16	50%	48%	63%	36%	53%
K 17	47%	23%	49%	32%	43%
K 18	23%	29%	63%	51%	59%

Miért a legkönnyebbnek bizonyult feladatot hagyták ki a legtöbben?

Emelt szint – összesítés

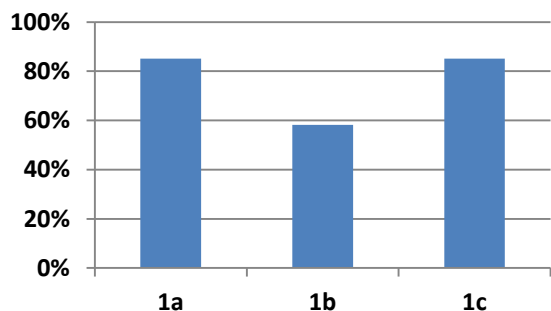
	2018	2017	2016	2015	2014	2013
I. rész	75%	77%	71%	81%	79%	63%
II. rész	70%	63%	66%	67%	68%	61%
Teljes	72,3%	69,1%	68,3%	73,0%	73,1%	61,9%

Emelt szint – feladatok

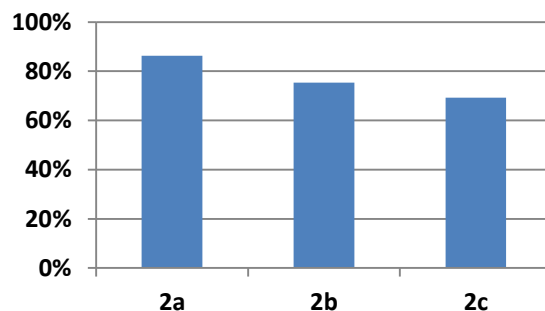
Feladat	Megoldottság	Kihagyta
1. háromszögek	74%	-
2. $f(x+1)/f(x)$	76%	-
3. osztályzatok, szállásdíj	74%	-
4. adatsokaság, LNKO	76%	-
5. 3x3-as puzzle	65%	29%
6. kör és érintői	69%	17%
7. karácsonyi figurák	77%	7%
8. Láncbíd	67%	22%
9. parkolási büntetések	70%	25%

Emelt szint – részfeladatok

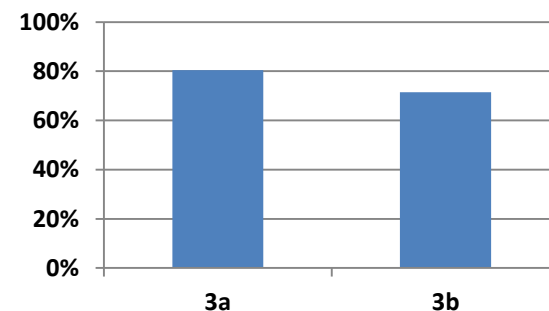
1. feladat



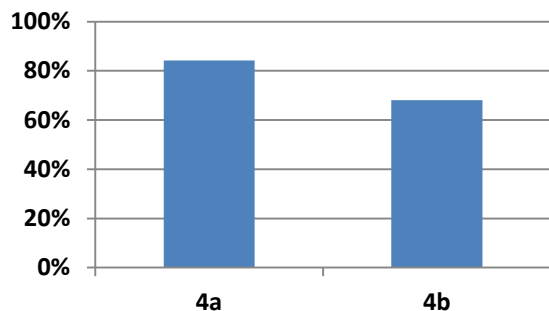
2. feladat



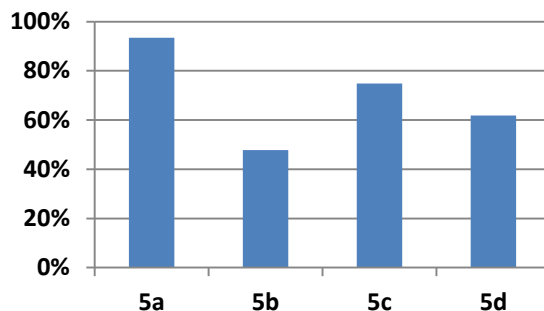
3. feladat



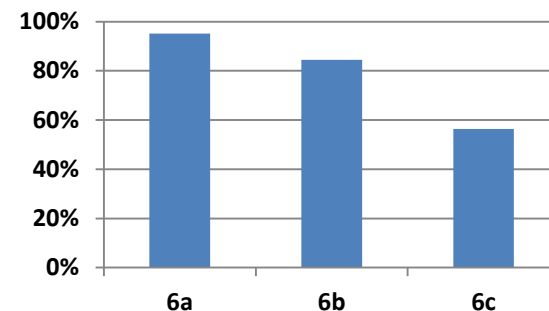
4. feladat



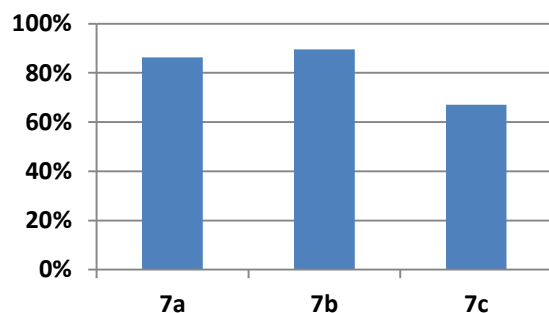
5. feladat



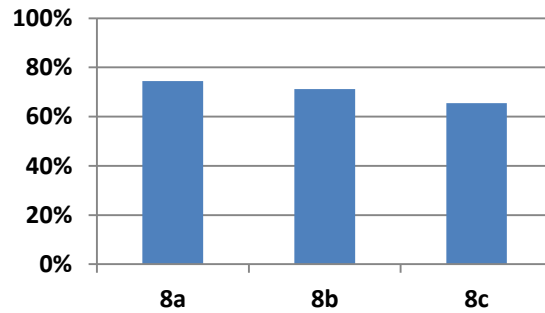
6. feladat



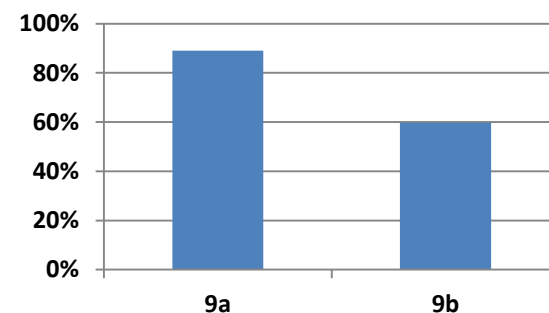
7. feladat



8. feladat



9. feladat

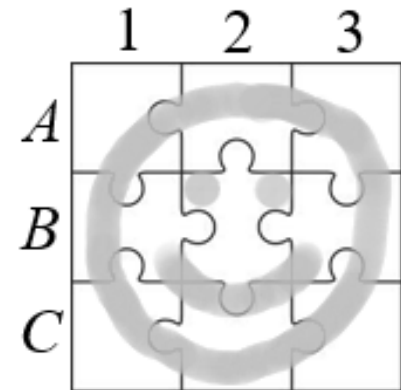


Emelt szint – a legjobban sikerült feladatok

6. Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7; 5)$ pont rajta van a k körön! (2 p, 95%)

5. Az ábrán egy 3×3 -as kirakósjáték (puzzle) szemantikusa látható. A kirakósjátékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A_1, A_2, \dots, C_3) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalon) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.



a) Rajzolja fel a kirakósjáték gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!

(3 p, 93%)

Emelt szint – a legjobban sikerült feladatok

7. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

a) (...)

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a.

Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette! (3 p, 90%)

Emelt szint – a legkevésbé sikerült feladatok

5. b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll! (4 p, 48%)

6. c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja! (9 p, 56%)

1. b) Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya $3 : 4 : 5$. (5 p, 58%)

Hasznos linkek

A 2012. május-júniusi érettségi feladatsor és az egyes feladatok mérésmethodikai vizsgálata

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/erttsegi_vizsgafeladatok_elemzese

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/meresmethodika/Matematika.pdf

Érettségi vizsgatárgyak elemzése 2009-2012. tavaszi vizsgaidőszakok

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/erttsegi_vizsgatargyak_elemzese

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/erttsegi_vizsgatargyak_elemzese/matematika.pdf

A kétszintű érettségi rendszerrel kapcsolatos változtatási igények felmérése a gyakorlati tapasztalatok alapján

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/ketszintu_erttsegi_vizsgarendszer_tanari_tapasztalatok

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/erttsegi_konferencia2014/vitaindito_matematika.pptx

A közép- és emelt szintű értékelési skálák összehasonlítása

http://www.oktatas.hu/kozneveles/projektek/tamop318_minosegfejl/projekthirek/erttsegi_ertekelesi_skalak_elemzese

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/ertekelesi_skalak_osszehasonlitasa/ertekelesi_skalak_matematika.pdf

Hasznos linkek

Az ellenőrzés problémaköre az érettségin

http://matek.fazekas.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=296:ellenorzes-es-valasz&catid=34&Itemid=223

(rövid kivonat:) KöMaL, 2015. október

Új (2017-től érvényes) részletes érettségi vizsgakövetelmények és vizsgaleírások

<http://magyarkozlony.hu/hivatalos-lapok/4477c562e02807f4db744faf08399740a82349cd/dokumentumok>

Próbafeladatsorok az új érettségi vizsgakövetelményekhez

<http://www.ofi.hu/erettsegi-2017-mintafeladatok>, <http://ofi.hu/matematika-mintafeladatsorok>

A matematika érettségi vizsga 2017-től (RLV 2015)

http://rlv.berzsenyi.hu/2015/Koncz_Csapodi.ppsx?attredirects=0&d=1

Eredményesség és számológép-használat az érettségi vizsgán (RLV 2016)

<http://rlv.berzsenyi.hu/2016/Eredmenyesseg%20es%20sz%D0%B0mologep-haszn%D0%B0lat%20az%20Erettsegi%20vizsg%D0%B0n.ppsx?attredirects=0&d=1>

Amit tudtunk, amit sejtettünk, és amit nem gondoltunk volna a matematikaérettségiről (RLV 2017)

http://rlv.berzsenyi.hu/2017/Csapodi-Koncz_Matematikaerettsegi_RLV17_KL.ppsx

Csaba Csapodi and Levente Koncz: The efficiency of written final exam questions in mathematics based on voluntary data reports, 2012–2015

Teaching Mathematics and Computer Science, 2016/14 p63-81)

http://tmcs.math.unideb.hu/load_doc.php?p=306&t=abs

A matematika érettségi vizsga elemzése 2005-2015 (Csapodi Csaba doktori értekezése)

<https://dea.lib.unideb.hu/dea/handle/2437/236563>

Köszönjük a figyelmet!

csapodi.csaba@ttk.elte.hu

klevante1@gmail.com