

Tízparancsolat, evolúció, matematika(i játékok)

Koncz Levente

NKE Óbudai Árpád Gimnázium, Budapest

Rátz László Vándorgyűlés

Esztergom, 2026. július 8.

Amiről szó lesz

„Van-e élet a jegylezárás után?”

1. A közlegelők tragédiája
2. Dollárárverés
3. Az egymillió dolláros játék
4. Fogolydilemma
5. Bónusz: Egyszámjáték – megtekerve

1. A közlegelők tragédiája

A közlegelők tragédiája a közjó és az önérdék konfliktusát mutatja be, amely az önzés szabadsága esetén egy társadalmi csapda. E jelenség a nevét Garrett Hardin *The Tragedy of the Commons* című cikkéből (1968) kapta. (Wikipédia)

Egy angol közlegelő tíz tehenet tud eltartani, és így mindegyik tehén 10 liter tejet ad.

A legelőn kiinduláskor 10 gazda tart fejenként egy tehenet.

Az egyik gazda egyszer csak gondol egyet, és kihajt még egy tehenet a legelőre.

Ekkor egy-egy tehénnek már kevesebb fű jut, ezért mindegyik 10 helyett csupán 9 liter tejet ad naponta – de az a gazda, amelyik két tehenet legeltet, 10 helyett 18 liter tejhez jut.

1. A közlegelők tragédiája

Ezt idővel észreveszi egy másik gazda, és az is kihajt még egy tehenet a legelőre. Ekkor már (a kevesebb táplálék miatt) minden tehén csak 8 liter tejet ad, de akinek két tehene van, annak 16 liter teje lesz.

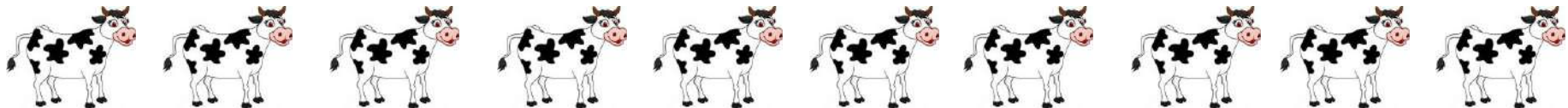
És így tovább: ha $10 + n$ tehén táplálkozik a legelőn, akkor mindegyik tehén $10 - n$ liter tejet ad naponta. És mivel minden egyes gazda (egy ideig) jobban jár, ha még egy tehenet kihajt, sorra meg is teszik.

Azonban amikor már legalább hatan cselekednek így, akkor azok is csak $2 \times 4 = 8$ liter tejet kapnak, akiknek két tehenük van.

Amikor már nyolc gazda tart két tehenet, a kététehenes gazdák is csak 4 liter tejet kapnak (és a kilencedik gazda már nem nyerne semmit egy második tehénnel). Ennek ellenére ha egy gazda úgy döntene, hogy visszavonja az egyik tehenét, rosszul járna.

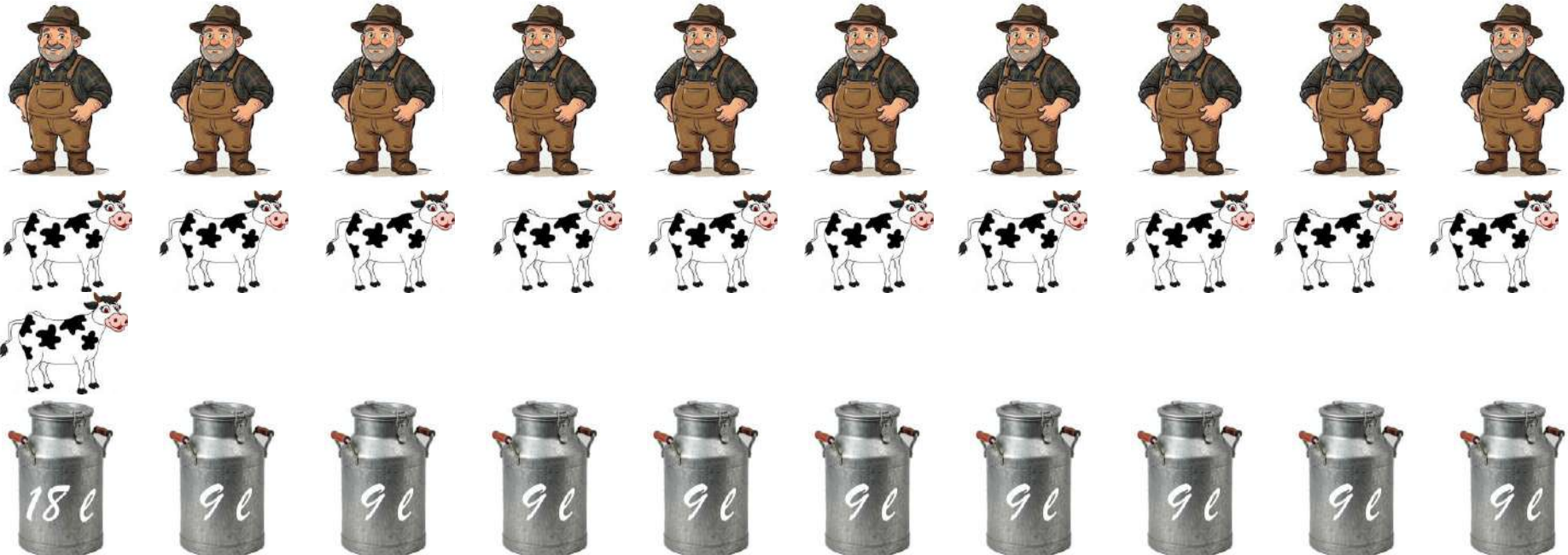
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10									
		10									
Dezertőrök		0									
		20									
Közösség		100									



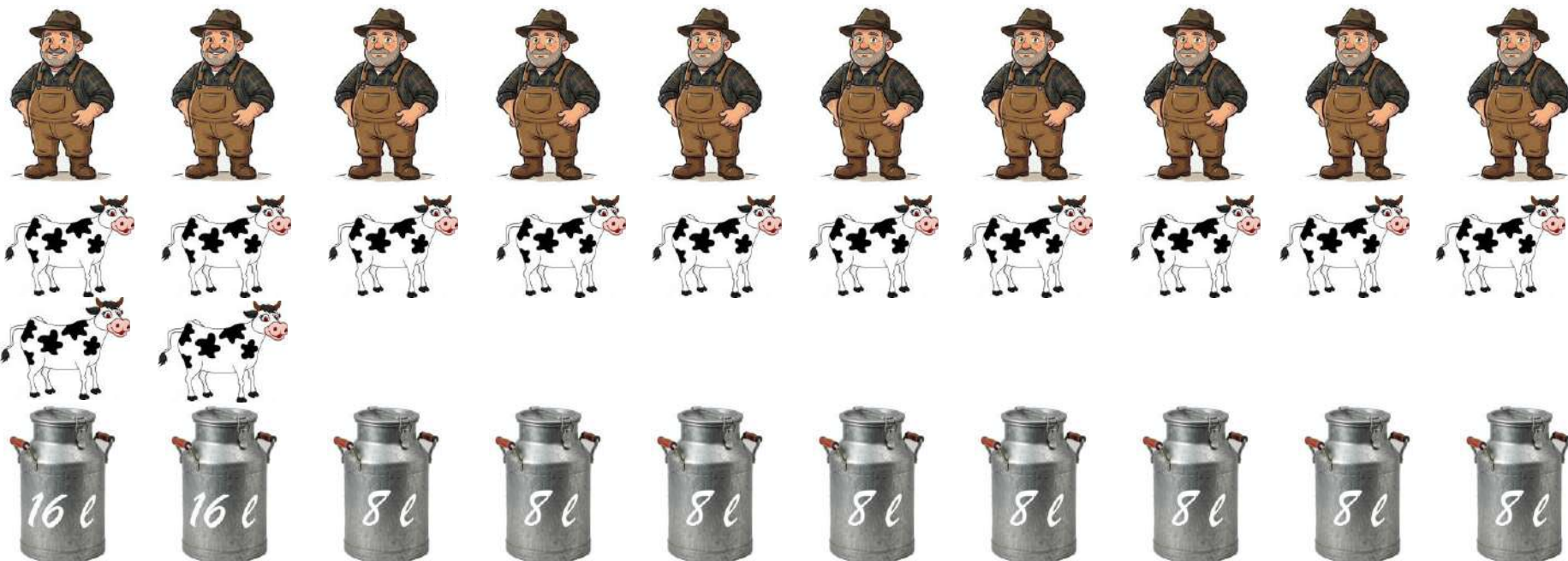
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9								
		10	9								
Dezertőrök		0	1								
		20	18								
Közösség		100	99								



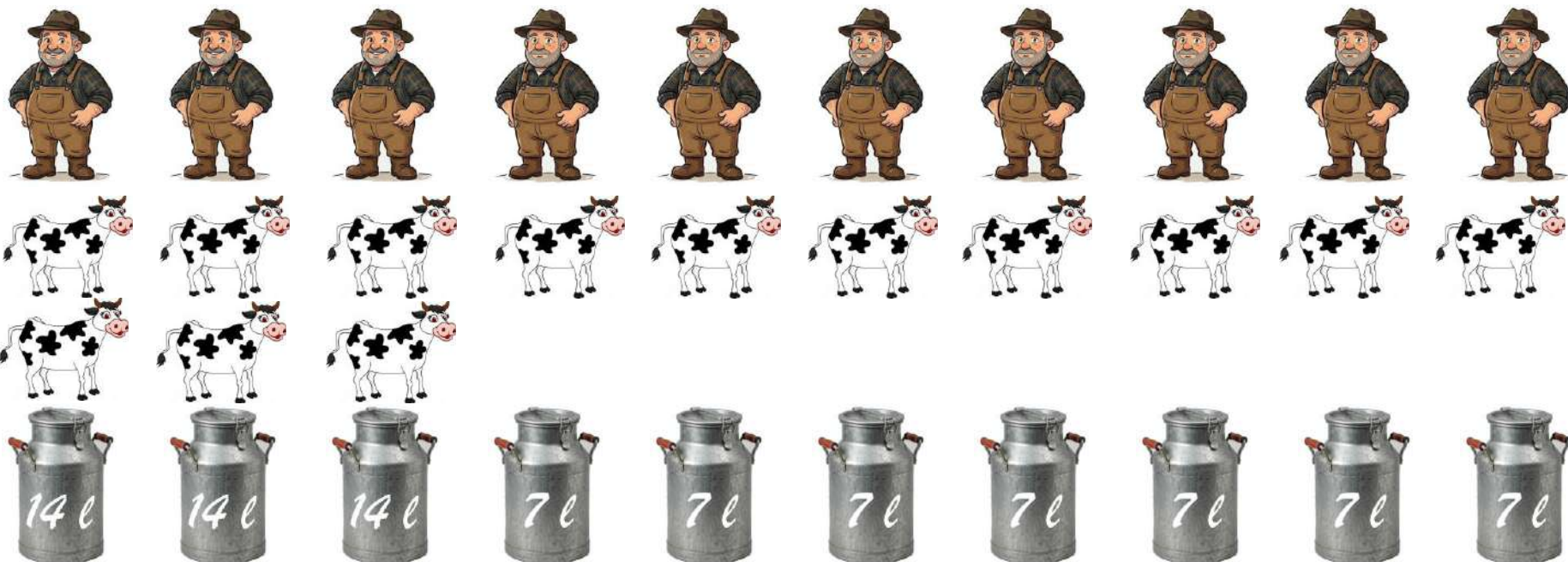
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8						
		10	9	8						
Dezertőrök		0	1	2						
		20	18	16						
Közösség		100	99	96						



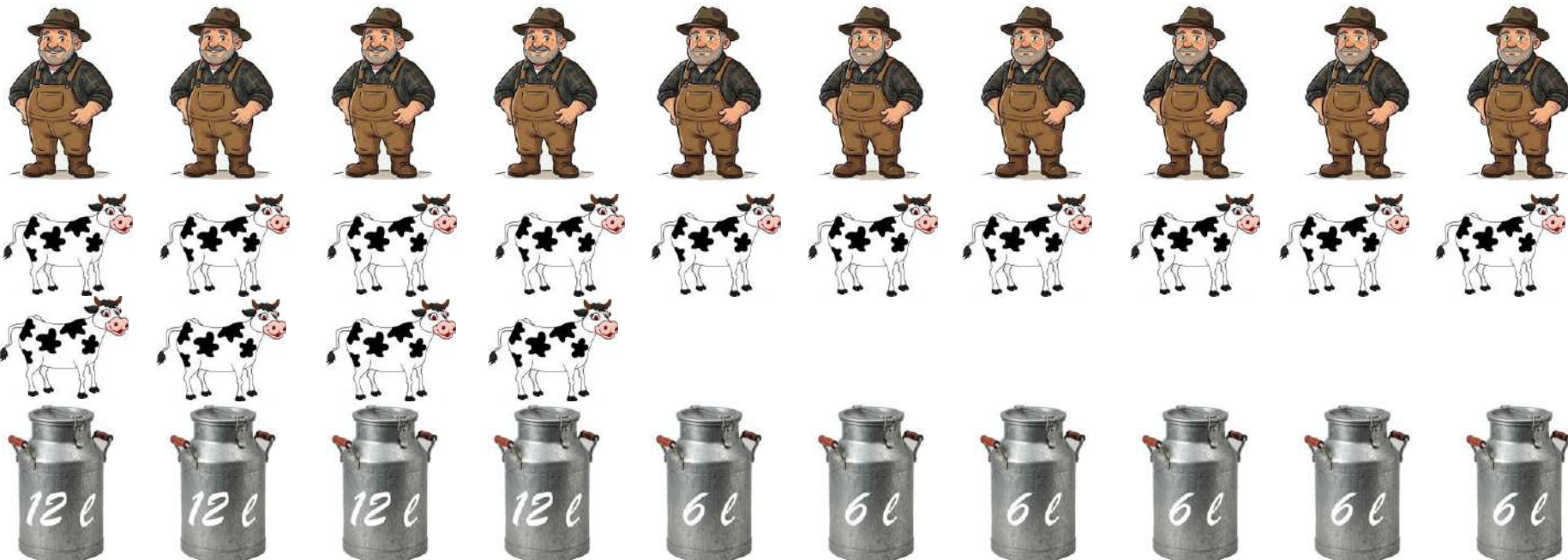
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7						
		10	9	8	7						
Dezertőrök		0	1	2	3						
		20	18	16	14						
Közösség		100	99	96	91						



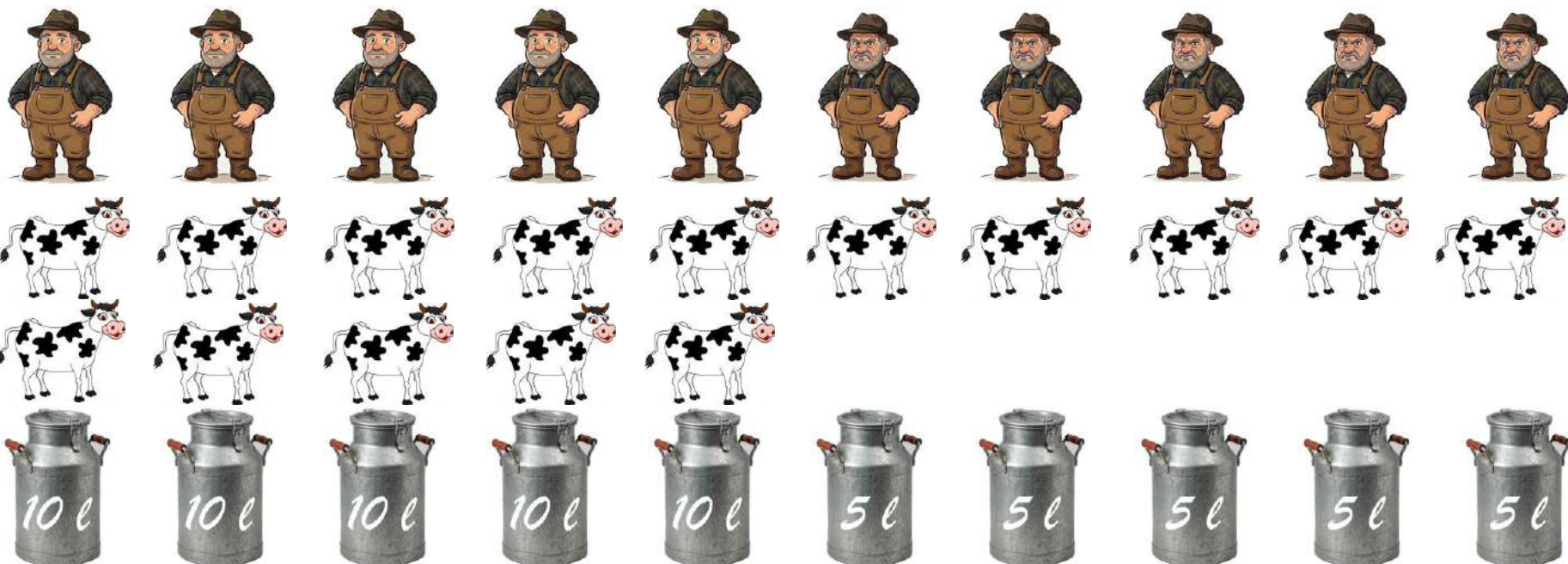
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7	6					
		10	9	8	7	6					
Dezertőrök		0	1	2	3	4					
		20	18	16	14	12					
Közösség		100	99	96	91	84					



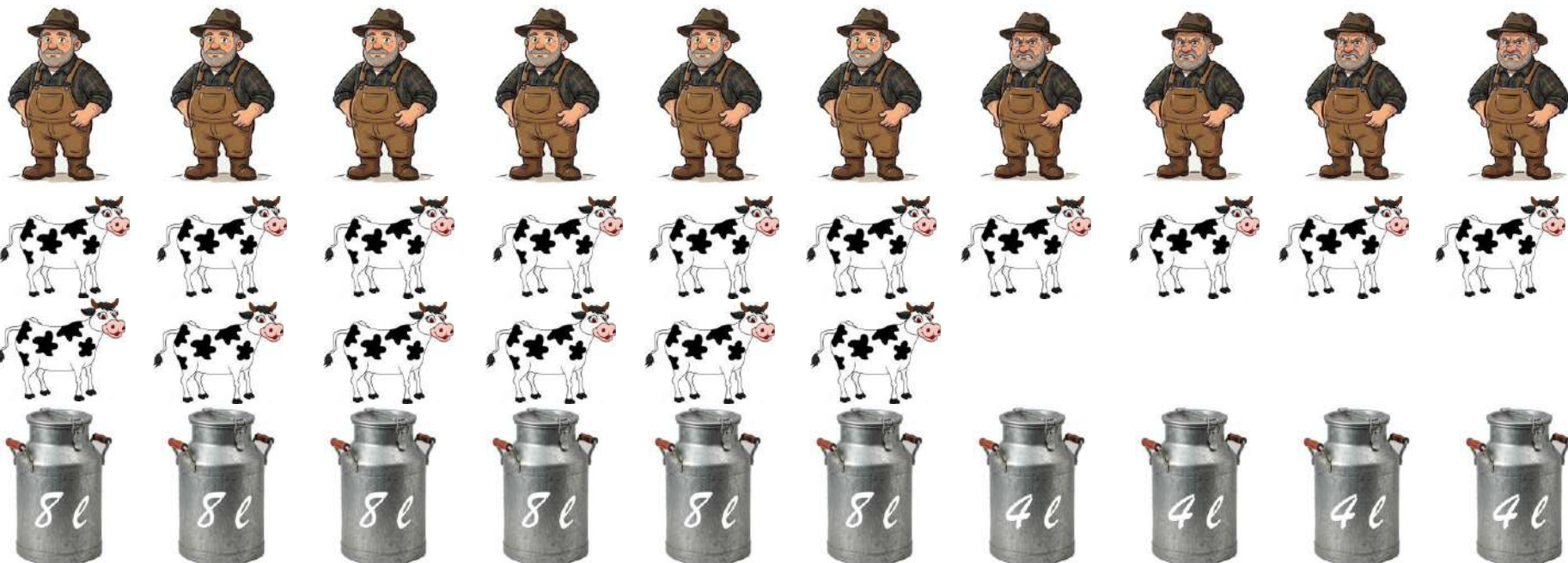
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7	6	5				
		10	9	8	7	6	5				
Dezertőrök		0	1	2	3	4	5				
		20	18	16	14	12	10				
Közösség		100	99	96	91	84	75				



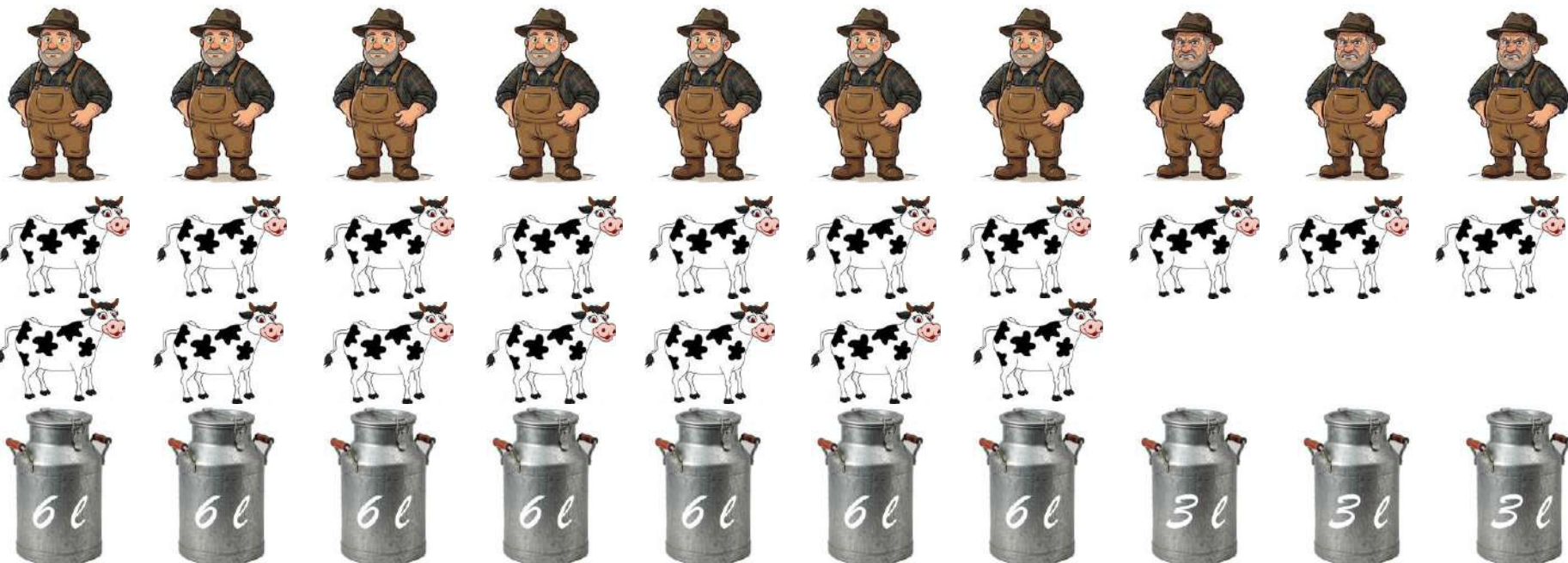
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7	6	5	4			
		10	9	8	7	6	5	4			
Dezertőrök		0	1	2	3	4	5	6			
		20	18	16	14	12	10	8			
Közösség		100	99	96	91	84	75	64			



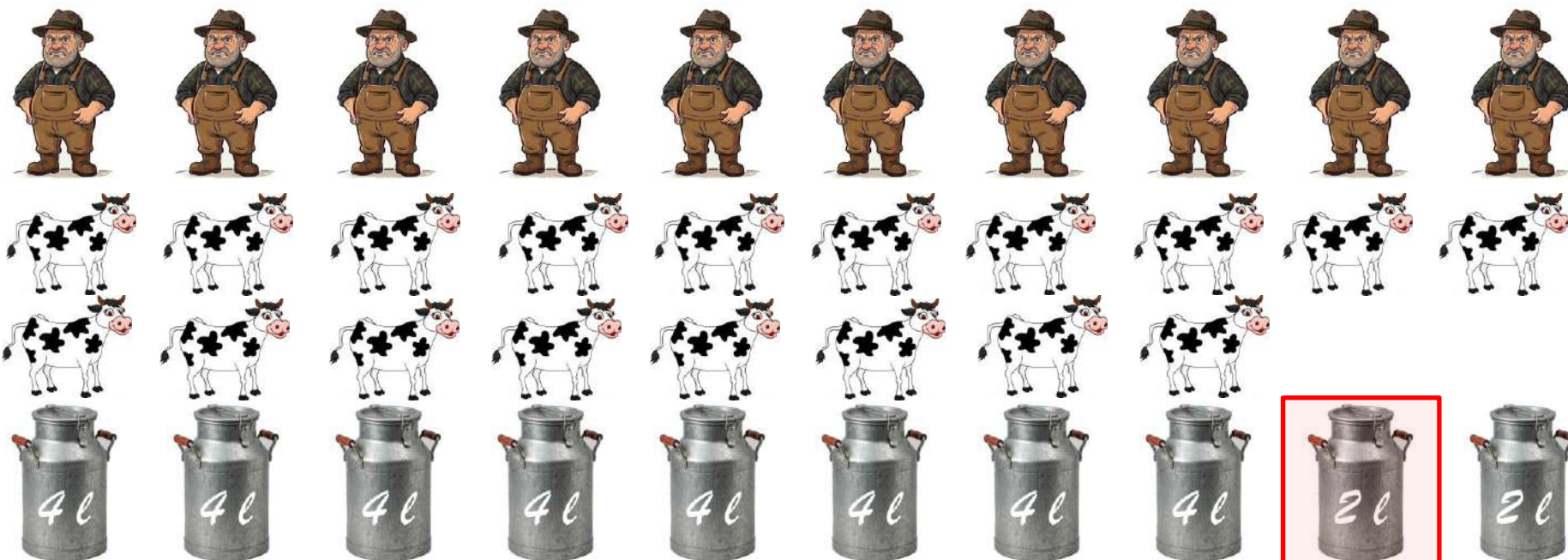
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7	6	5	4	3		
		10	9	8	7	6	5	4	3		
Dezertőrök		0	1	2	3	4	5	6	7		
		20	18	16	14	12	10	8	6		
Közösség		100	99	96	91	84	75	64	51		



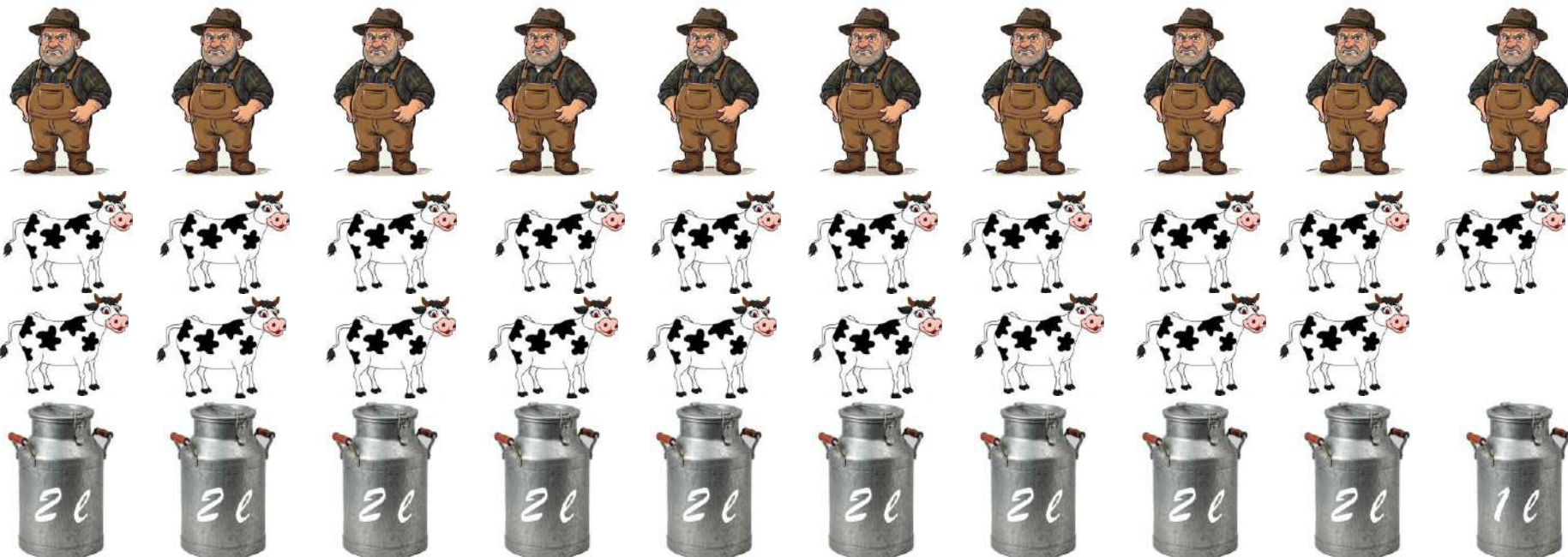
1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7	6	5	4	3	2	
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	
Dezertőrök		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
		20	18	16	14	12	10	8	6	4	
Közösség		100	99	96	91	84	75	64	51	36	



1. A közlegelők tragédiája

Szabály- követők		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Dezertőrök		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
Közösség		100	99	96	91	84	75	64	51	36	19



1. A közlegelők tragédiája

A játék az osztályteremben

- Szabályok, célok
- Tipikus lefolyás
 - „hagyjuk gyűlni”
 - mi van, ha elfogy?
 - a játék vége
 - kiértékelés
- Mi lehetett volna?
 - $2^{10} = 1024$, $2^{20} \approx 1$ millió
- „Evolúciósan legjobb stratégia”

1. A közlegelők tragédiája

Közlegelők a világban

- Környezetszennyezés
- túlhasználás, elsivatagosodás
- ökológiai lábnyom

A közlegelő, mint erőforrás addig működik optimálisan, amíg minden felhasználó betartja a közös megegyezéssel megállapított szabályokat.

Csapdahelyzet: egy szabályokat betartó szereplő számára bármely időpontban nyereségesebb a „dezertálás”, mint a szabályok betartása („mohó algoritmus”).

Az önzés a teljes populációt a katasztrófa felé sodorhatja. Evolúciós előnyben van az közösség, amelyikben erős az önzetlenség génje (tízparancsolat).

1. A közlegelők tragédiája

Hogyan kerülhető el a tragédia?

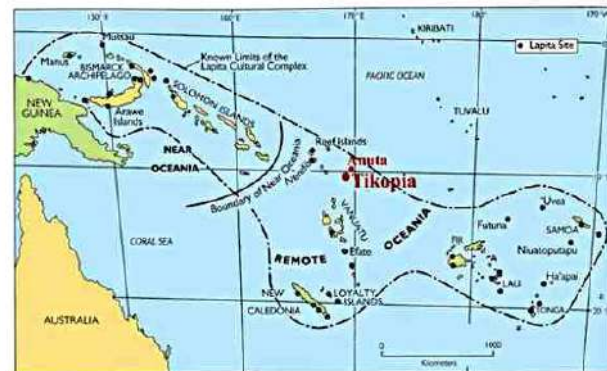
1. Sehogy

Hardin (1968): *„Létezik-e olyan kulturális csoport, amely manapság akár csak intuitív szinten is, de megoldotta ezt a gyakorlati problémát? Egy egyszerű tény bizonyítja, hogy nem létezik: nincs ma a világon olyan virágzó populáció, amelynek növekedési rátája zéró volna, méghozzá már egy bizonyos ideje zéró.”*

2. Kivétel: Tikopia (Salamon-szigetek)

3. A közgondolkodás megváltoztatása:

„Amit magadnak nem kívánsz, azt másnak se tedd!” (Konfuciusz) *„Amit tehát szeretnétek, hogy az emberek veletek cselekedjenek, ti is ugyanazt cselekedjétek velük.”* (Mt 7,12)



2. Dollárárverés

Shubik (1971):

Eladó 1 dollár. Kikiáltási ára 1 cent.

A játék az árverések szokásos szabályai szerint folyik, egy kivétellel: nemcsak annak kell megfizetnie a licitált összeget, aki a legmagasabb árat mondta (és így megnyerte az 1 dollárt), hanem annak is, aki az utolsó előtti ajánlatot tette – de ő nem kap semmit.

2. Dollárárverés

A játék az osztályteremben

(Shubik: „bulikon a legjobb játszani...”)

- Szabályok, célok
- Tipikus lefolyás
 - beindul-e a játék?
 - az 50 Ft átlépése
 - a 100 Ft átlépése
 - a játék vége
 - kiértékelés
 - második, harmadik játék
- „Evolúciósan legjobb megoldás”
 - Mi van, ha nem lehet osztózni?

2. Dollárárverés

Dollárárverések a világban

- háborúk eszkalációja (Vietnam)
- a Concorde-csapda
- sztrájkok
- „too much invested to quit”
- a tüskék pikók stratégiája
pózolás véletlenszerű ideig – „kevert stratégia”

3. Az egymillió dolláros játék

Hofstadter (Scientific American, 1983):

Egymillió dollárt lehet nyerni, bárki pályázhat (akár többszörösen is). Ha n pályázó van, akkor a közülük kisorsolt nyertes az egymillió dollár n -edrészét nyeri meg.

Játsszunk!

Mi történt a Scientific American pályázatán?

2000+ pályázat

1-szeres: 1133, 2-szeres: 31, 3-9-szeres: 51

10-szeres: 49, 100-szoros: 61, 1000-szeres: 46

1 milliószoros: 33, 10^{100} -szoros: 9

3. Az egymillió dolláros játék

A játék az osztályteremben

- Szabályok
- Tipikus lefolyás
 - kiértékelés
- „Evolúciósan legjobb megoldás”
 - Mi van, ha nem lehet osztozni?
 - Mi van, ha nem lehet kommunikálni?

3. Az egymillió dolláros játék

Mi van, ha nem lehet kommunikálni?

- Mindenki azonos elv szerint döntsön, hogy pályázzon-e.
- Ötlet: mindenki dobjon fel egy n oldalú dobókockát, és csak akkor pályázzon, ha 1-est dobott ($p = 1/n$).
- Kérdés: mi az n optimális értéke?
 - 10 000 játékosnál $n = 10\,000$ esetén túl nagy a valószínűsége annak, hogy végül senki nem pályázik, kisebb n esetén viszont túl nagy lehet a valószínűsége annak, hogy többen is pályáznak.
 - Keressük meg azt az n -et, amelyre a nyeremény várható értéke a legnagyobb:

$$P(0 \text{ pályázó}) \cdot 0 + P(1 \text{ pályázó}) \cdot 1\,000\,000 + P(2 \text{ pályázó}) \cdot 500\,000 + \\ + P(3 \text{ pályázó}) \cdot 333\,333 + \dots = \sum_{i=0}^{10\,000} P(i \text{ pályázó}) \cdot \frac{1\,000\,000}{i},$$

$$\text{ahol } P(i \text{ pályázó}) = \binom{10\,000}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{10\,000-i}.$$

3. Az egymillió dolláros játék

Mi van, ha nem lehet kommunikálni?

➤ Intuíció?

➤ Excel!

pl. $n = 10\,000$ játékos esetén

Várható nyeremény	Dobókocka oldalszáma	Pályázók Nyeremény	0	1	2	3	4	5
			0	1 000 000	500 000	333 333	250 000	200 000
484 850	10000		0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003
498 803	9000		0,329	0,366	0,203	0,075	0,021	0,005
510 198	8000		0,286	0,358	0,224	0,093	0,029	0,007
516 811	7000		0,240	0,342	0,245	0,116	0,042	0,012
517 374	6654		0,222	0,334	0,251	0,126	0,047	0,014
514 955	6000		0,189	0,315	0,262	0,146	0,061	0,020
458 063	4000		0,082	0,205	0,257	0,214	0,134	0,067

3. Az egymillió dolláros játék

Mi van, ha nem lehet kommunikálni?

➤ Intuíció?

➤ Excel!

Játékosok száma	n optimális értéke	$P(0 \text{ pályázó})$	$P(1 \text{ pályázó})$	$P(2 \text{ pályázó})$	$P(>2 \text{ pályázó})$	Max várható nyeresemény
15	10	0,206	0,343	0,267	0,184	532 605
30	20	0,215	0,339	0,259	0,187	524 858
100	67	0,22229	0,33680	0,25260	0,18831	519 573
1000	666	0,22254	0,33465	0,25140	0,19141	517 573
10 000	6654	0,22247	0,33436	0,25130	0,19187	517 374
100 000	66 540*	0,22249	0,33438	0,25130	0,19183	517 354
1 000 000	665 398	0,22249	0,33438	0,25130	0,19183	517 352

➤ Kérdés: tartanak ezek az értékek valamihez? Mihez?

4. Fogolydilemma

„A játékelmélet gumicsontja” (Mérő László)

Flood és Drescher (1950), Tucker (1951):

A rendőrség elfog két régóta körözött tettestársat, akik együtt egy súlyos bűncselekményt követtek el. Közvetlen bizonyíték nincs ellenük, csupán egy gyorsajtás bizonyítható rájuk, a vizsgálóbíró ezért szeretné rávenni őket, hogy tegyenek vallomást a társuk ellen. A következő ajánlatot teszi mindkét fogolynak, akik egymással nem kommunikálhatnak:

„Ha vallasz, a társad pedig nem vall, akkor ő kap 10 évet, téged elengedünk. De ha csak ő vall, te pedig nem, akkor te kapod a 10 évet, és őt engedjük el. Ha mindketten vallotok, akkor 5-5 évet kaptok. Ha pedig egyikőtök sem vall, akkor 1-1 évet kaptok a száguldozásért.”

4. Fogolydilemma

Táblázattal:

		2. tettestárs	
		vall	nem vall
1. tettestárs	vall	-5; -5	0; -10
	nem vall	-10; 0	-1; -1

1. gondolatmenet:

*„**Ha a társam vall**, akkor ha én is vallok, akkor 5 évet kapok, ha nem vallok, akkor 10-et. Tehát ebben az esetben **jobb vallani**.*

***Ha a társam nem vall**, akkor ha én vallok, akkor 0 évet kapok, ha nem vallok, akkor 1-et. Tehát ebben az esetben is **jobb vallani**.*

*Tehát **vallani fogok**.”*

Mindketten így gondolkoznak, mindketten vallanak, és így kapnak **5-5 évet**. Pedig megúszhatták volna 1-1 évvel!

4. Fogolydilemma

Táblázattal:

		2. tettestárs	
		vall	nem vall
1. tettestárs	vall	-5; -5	0; -10
	nem vall	-10; 0	-1; -1

2. gondolatmenet:

*„Ha mindketten logikusan gondolkozunk, **szükségszerűen ugyanarra az eredményre jutunk**. Tehát vagy mindketten vallunk, vagy egyikünk sem vall.*

*A két lehetőség közül az a jobb, amikor egyikünk sem vall. Tehát **nem fogok vallani**.”*

Így megússzák **1-1 évvel**.

???

4. Fogolydilemma

Versengő stragégia vs **kooperatív** stratégia

Hétköznapi fogolydilemmák:

- fegyverkezési verseny
- a két benzinkút (többmenetes fogolydilemma)

Többszemélyes fogolydilemmák:

- a közlegelők tragédiája
- tüskés pikók viselkedése egy nagy hal közelében
- menekülés a tűzből

4. Fogolydilemma

A játék az osztályteremben?

Axelrod: programok versenyei (1979, 1982)

- a győztes: TFT („szemet szemért”)

- „Legyetek tehát okosak, mint a kígyók, és szelídek, mint a galambok.” (Mt 10,16)

- a sikeres programok tulajdonságai („evolúciósan jó stratégiák”):
barátságosság, megbocsátás, provokálhatóság, reakcióképesség,
kiismerhetőség

- a tüskés pikók stratégiája

- pszichológiai kísérletek: 35-60% kooperálás

5. Bónusz: Egyszámjáték – kitekerve

Egyszámjáték

Mindenki gondol egy pozitív egész számra. Az nyer, aki a **legkisebb** olyan számra gondolt, amire rajta kívül senki más.

Kitekerés

Mindenki gondol egy pozitív egész számra 1 és 100 között. **Azok** nyernek, akik a **második legnagyobb** számra gondoltak.

Játsszunk!

Irodalom

Mérő László: Mindenki másképp egyforma (Tericum, 2000)

https://pangea.blog.hu/2017/03/29/a_kozlegelok_tragediaja_i_tan_mese_a_fenntarthatatlan_fejlodesrol

https://pangea.blog.hu/2017/04/19/a_kozlegelok_tragediaja_ii_tikopia_a_pozitiv_pelda

https://pangea.blog.hu/2018/06/24/a_kozlegelok_tragediaja_iii_a_fold_terraformalasa

Köszönöm a figyelmet!

www.arpadgimnazium.hu/rlv

klevante1@gmail.com