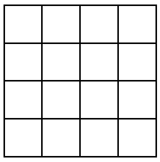
11-12. évfolyam **Háziverseny II. forduló** **2021. február**

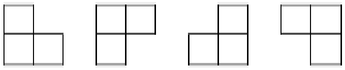
Megoldások

I. Színezzünk!

A) Van egy 4×4-es rács, amelynek mind a 16 mezőjét kékre vagy pirosra vagy zöldre színezzük.



Az összes lehetséges színezés közül add meg a rács azon színezését, amely a lehető legtöbb olyan L-triminót tartalmazza, amely három színnel van színezve! L-triminóknak nevezzük ezeket az alakzatokat:



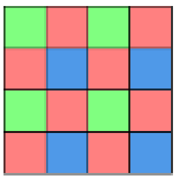
Az alábbi színezés (P: piros, K: kék, Z: zöld) például két darab olyan L-triminót tartalmaz, ami három színnel van színezve (az egyiket megjelöltük):

P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	Z	K

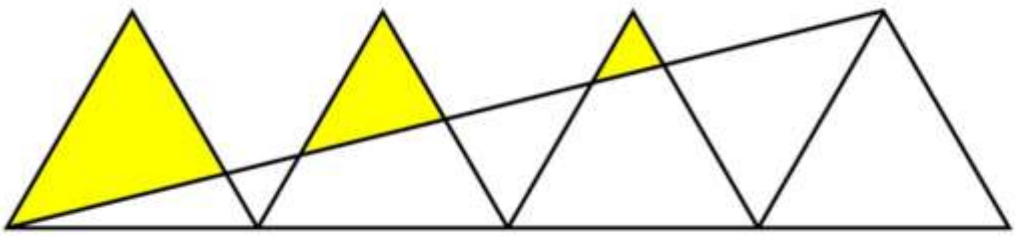
(Ebben a feladatban **nem** szükséges bizonyítani, hogy a lehető legjobb megoldást találtad meg, a feladatra kapott pontszámod attól függ, hogy az elérhető maximumhoz képest az általad adott válasz mennyi.)

Megoldás: maximum 18 (indoklás nélkül megadva egy helyes színezést)

6 pont

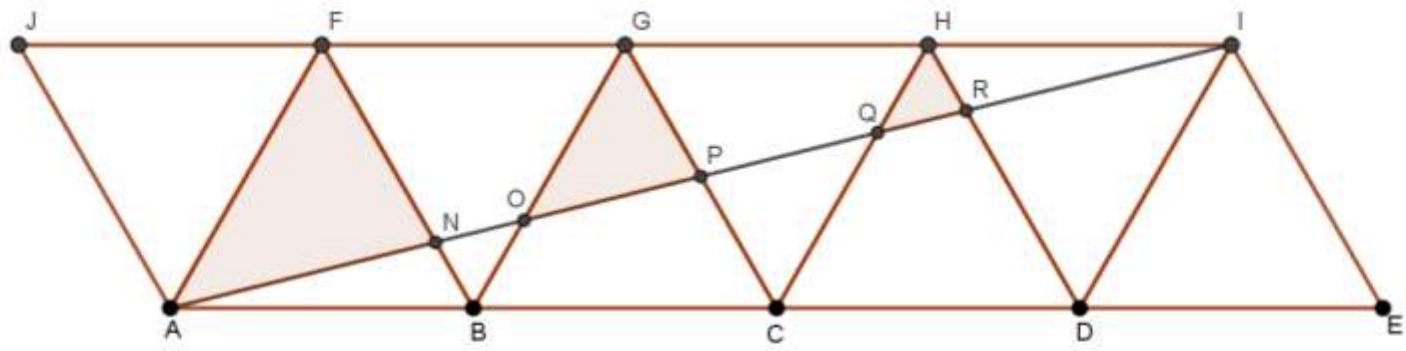


B) Az ábrán négy szabályos háromszög látható, amelyek területe (külön-külön) 6 területegység. Mennyi a színezett rész területe? (Sejtés megfogalmazásához nyugodtan használhatunk például GeoGebrát, de a feladatra adott választ bizonyítanunk kell!)



Megoldás:

Egészítsük ki az ábrát:



Két segédállítást fogunk használni:

1) egy háromszög területe meghatározható úgy, hogy két oldalának és az ezek által közbeszárt szög szinuszának szorzatát vesszük, majd ezt a szorzatot osztjuk 2-vel. Tehát $T_{ABF_\Delta} = \frac{AF \cdot FB \cdot sin60^o}{2} = 6$;

2) a párhuzamos szelők tételét: tekintsük az I szögcsúcsú AIJ szögtartományt, a feladat feltételei miatt például HR || JA, ekkor a tétel szerint $\frac{HR}{JA} = \frac{IH}{IJ}$.

A három színezett háromszög területe:

$$T_{ANF_\Delta} = \frac{AF \cdot FN \cdot sin60^o}{2} = \frac{AF \cdot \frac{3}{4}FB \cdot sin60^o}{2} = \frac{3}{4} \cdot T_{ABF_\Delta} = \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{9}{2},$$

hiszen $\frac{FN}{JA} = \frac{IF}{IJ} = \frac{3}{4}$, azaz $FN = \frac{3}{4}JA = \frac{3}{4}FB.$

$$T_{GOP_\Delta} = \frac{GO \cdot GP \cdot sin60^o}{2} = \frac{\frac{2}{3}AF \cdot \frac{1}{2}FB \cdot sin60^o}{2} = \frac{1}{3} \cdot T_{ABF_\Delta} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2,$$

hiszen $\frac{GO}{AF} = \frac{IG}{IF} = \frac{2}{3}$, azaz $GO = \frac{2}{3}AF$ és $\frac{GP}{JA} = \frac{IG}{IJ} = \frac{1}{2}$, azaz $GP = \frac{1}{2}JA = \frac{1}{2}FB.$

$$T_{HQR_\Delta} = \frac{HQ \cdot HR \cdot sin60^o}{2} = \frac{\frac{1}{3}AF \cdot \frac{1}{4}FB \cdot sin60^o}{2} = \frac{1}{12} \cdot T_{ABF_\Delta} = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2},$$

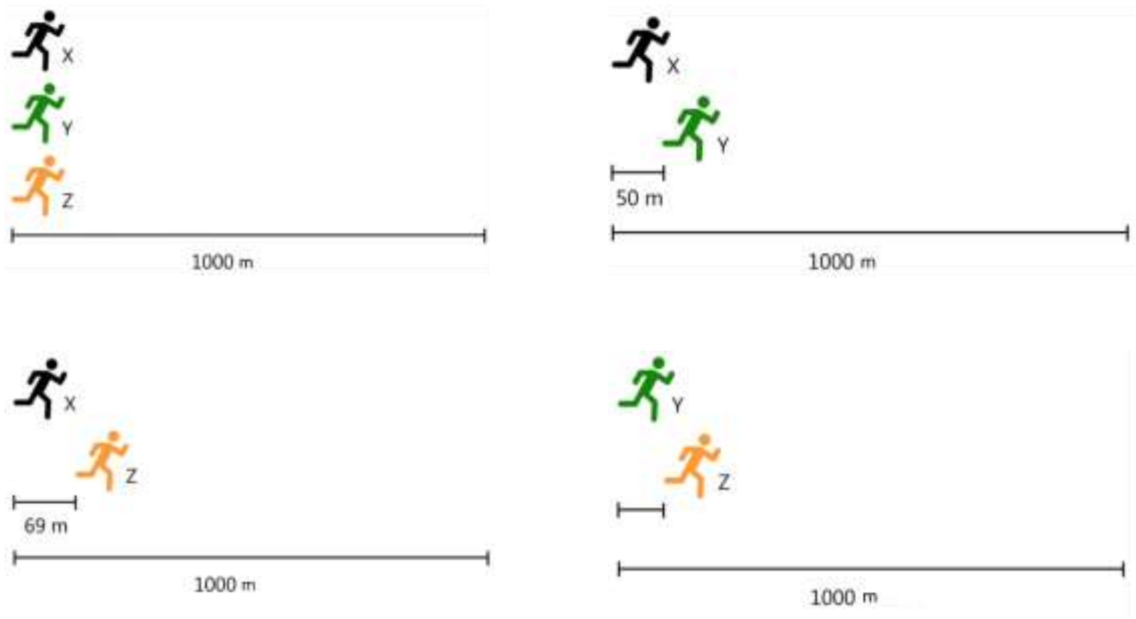
hiszen $\frac{HQ}{AF} = \frac{IH}{IF} = \frac{1}{3}$, azaz $HQ = \frac{1}{3}AF$ és $\frac{HR}{JA} = \frac{IH}{IJ} = \frac{1}{4}$, azaz $HR = \frac{1}{4}JA = \frac{1}{4}FB.$

Tehát a kérdezett terület: $\frac{9}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 7.$

6 pont

II. Fussunk!

Egy „futóversenyen” X, Y és Z vesz részt. A táv 1000 méter. Ha X és Y versenyeznek, akkor érnek egyszerre célba, ha X előnyt ad Y-nak: 50 métert. Azt is tudjuk, hogy ha X és Z versenyeznek, ők ketten akkor érnek egyszerre célba, ha X előnyt ad Z-nek: 69 métert. Y hány méter előnyt adjon Z-nek, hogy egyszerre érjenek célba? (Feltételezzük, hogy a futók sebessége a verseny során állandó és független az aktuális ellenféltől.)



Ha Y 50 méter, míg Z 69 méter előnyt kap X-től, és ekkor érnek egyszerre célba, akkor ha Y és Z futnának együtt egy 1000-50=950 méteres távon, ők ketten akkor érnének egyszerre célba, ha Z épp 69-50=19 méter előnyt kapna Y-tól. Ez azt jelenti, hogy az 1000 méteres távon Z-nek $\frac{19}{950} \cdot 1000 = 20$ méter előnyt kell kapnia Y-tól, hogy egyszerre érjenek a célba.

6 pont

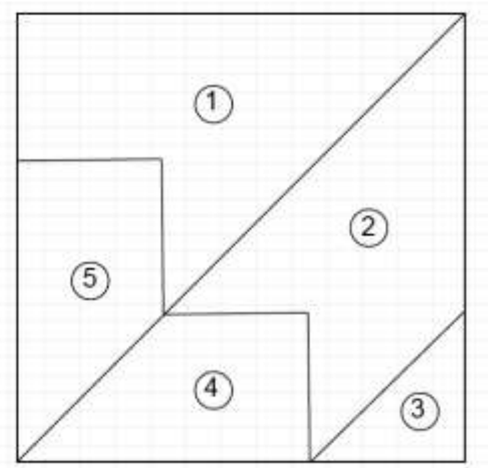
III. Barkácsoljunk papírból!

A) Az alábbi ábrán a görög abc π betűjének nagy nyomtatott változata látható, amelyet két egyenes vágással öt részre vágunk szét (az egyenes vágások a vízszintessel 45^o-os szöget zárnak be, az alakzatot alkotó szakaszok hossza 1, 2 illetve 5 egységnyi).

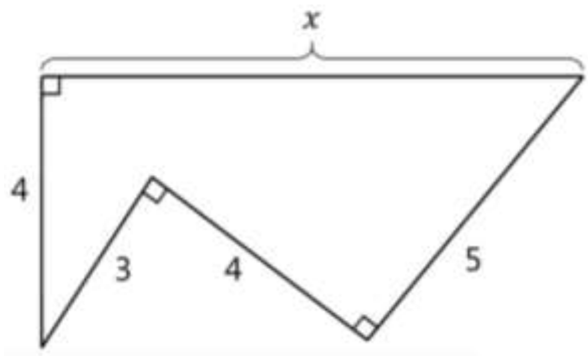
Tudunk-e az öt rész hézagmentes és átfedés nélküli kirakásával egy négyzetet barkácsolni?

Megoldás: indoklás nélkül megadva egy helyes elrendezést

6 pont

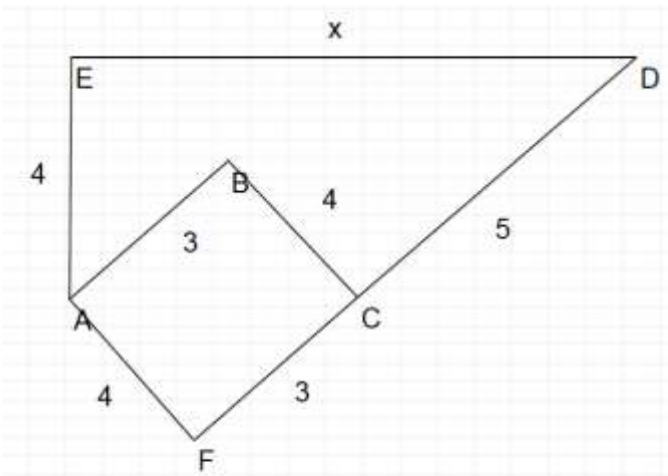


B) Valaki azt mondja, az alábbi ábrán látható ismeretlen szakasz hossza: $x = 5 + 3 = 8$ cm. Igazoljuk papírból barkácsolással és számolással, hogy az illető nem téved (az ábrán jelölt szögek derékszögek)!



Megoldás:

Egészítsük ki az ábrát:



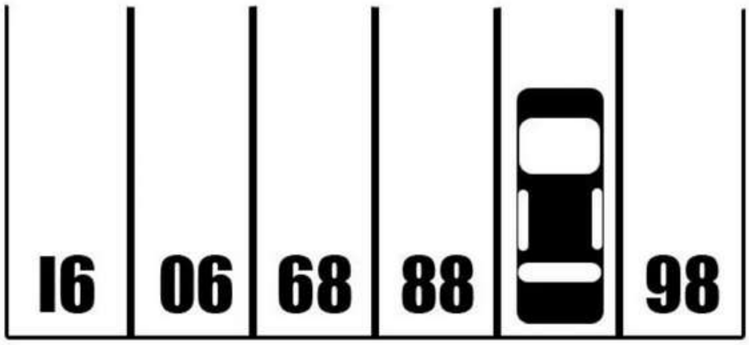
A derékszögek miatt *ABCF* négyszög téglalap, így $AF = 4$,valamint *F, C* és *D* pontok egy egyenesre illeszkednek, így $FD = FC + CD = 8$.

Az *AFD* derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt $AD^2 = AF^2 + FD^2 = 4^2 + 8^2 = 80$, másrészt az *AED* derékszögű háromszögben $x^2 = AD^2 - EA^2 = 80 - 4^2 = 64$, tehát $x = 8$, azaz valóban nem tévedett az, aki azt állította, hogy a kérdezett szakasz 8 hosszú.

6 pont

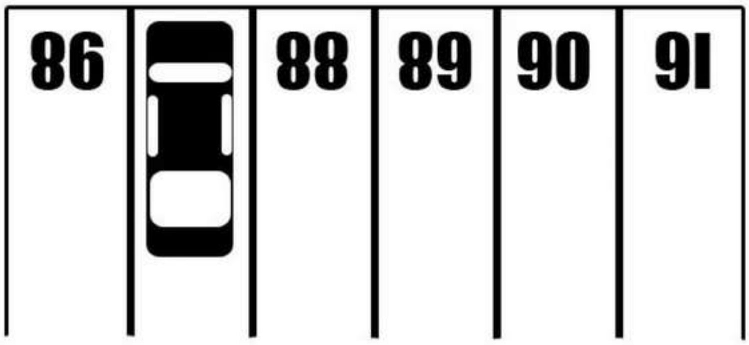
IV. Nézzük másképp!

Milyen számot takar az autó?



Megoldás:

Nézzük fejjel lefelé az ábrát!



A válasz: **87**

6 pont