

Matematika háziverseny II. forduló 2021.

7-8. osztály

MEGOLDÁSOK

1. Az iskolai diákönkormányzat vezetősége négy munkacsoportban dolgozik. Minden vezetőségi tag pontosan két munkacsoportban dolgozik, és bármelyik két munkacsoportnak pontosan egy közös tagja van. Hány tagú a diákönkormányzat vezetősége? (6 pont)

Megoldás:

Minden munkacsoportban legalább három ember dolgozik, mert ha valamelyik munkacsoport kevesebb tagból állna, akkor nem lehetne a másik hárommal közös tagja (mert ekkor egy embernek már legalább három munkacsoportban kellene lennie). Másrészt nem lehet 3-nál több tagja, mert ekkor a többi munkacsoport közül valamelyikkel legalább két közös tagja lenne. Így mindegyik munkacsoport pontosan 3 tagból áll, a 4 munkacsoport névjegyzéke tehát összesen 12 nevet tartalmaz, de minden nevet kétszer, ezért a vezetőség 6 tagú.

2. Négy férfi elment színházba. Hazafelé jövet a ruhatárban összecserezték kalapjaikat és kabátjaikat: a ruhatáros mindenkinek egy másik férfi kalapját, és még egy másik férfi kabátját adta. Ferenc annak a kabátját kapta, akinek a kalapját Dénes, és Dénes kabátját az vitte el, aki Ferenc kalapját. Péter kabátját József kapta. Kinek a kabátját és kalapját vitte magával Ferenc és Dénes? (7 pont)

Megoldás:

Ferenc nem vihette el Dénes kabátját, mert Dénes nem a saját kalapját kapta; nem vihette el a sajátját sem és Péterét sem, tehát csak Józsefé lehetett nála, így Dénes József kabátjában távozott.

Dénes kabátját csak Péter vihette el, így ő vitte el Ferenc kalapját is, és Dénesnek már csak Ferenc kalapja maradhatott.

József nem vihette el Péter kalapját, mert nála van Péter kabátja, ezért neki csak Dénes kalapja juthatott, és Ferencnek Pedig Péteré.

Tehát összegezve: Ferenc József kabátjában és Péter kalapjában, Dénes Ferenc kabátjában és József kalapjában, József Péter kabátjában és Dénes kalapjában, Péter Dénes kabátjában és Ferenc kalapjában távozott a színházból.

3. 33 gyöngy van egy láncon, a gyöngyök közül a középső a legdrágább. Balról jobbra haladva a láncon a középsőig (a középsőt is beleértve) minden gyöngy 10 000 forinttal többet ér, mint az előző, jobbról balra haladva a középsőig (a középsőt is beleértve) minden gyöngy 15 000 forinttal többet ér, mint az előző. Az egész lánc értéke 6 500 000 forint. Mennyit ér a középső gyöngy? (7 pont)

Megoldás:

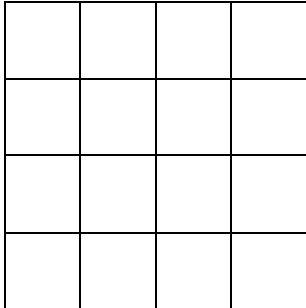
A középső gyöngy értéke legyen x forint. Ekkor tőle balra a gyöngyök sorban $x-10\,000$, $x-20\,000$, ..., $x-160\,000$ forintot érnek, tőle jobbra pedig $x-15\,000$, $x-30\,000$, ..., $x-240\,000$ forintot érnek. Ezek összege a középsővel együtt $33x - 2500 \cdot (1+2+3+\dots+16) = 33x - 25\,000 \cdot 136 = 33x - 3\,400\,000$, tehát a középső gyöngy értéke $(6\,500\,000 + 3\,400\,000):33 = 300\,000$ forint.

4. Anna, Bori, Cili és Dóri találtak egy titkos lépcsőt, amely a padlásról vezetett le, és régóta nem járt rajta senki, ezért teljesen belepte a por. Úgy szaladtak le rajta egymás mellett a legfelső lépcsőfokról indulva, hogy Anna minden második, Bori minden harmadik, Cili minden negyedik és Dóri minden ötödik lépcsőfokra lépett rá. Miután leszaladtak, észrevették, hogy minden lépésük nyoma meglátszik a lépcsőfokokon, és csak a legfelső és a legalsó lépcsőfokon van rajta mindannyiuk lábnyoma. Hány olyan lépcsőfokot találhatunk, amelyen csak egy lábnyom van? (7 pont)

Megoldás:

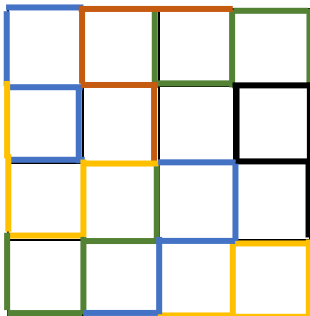
Legyen a legfelső lépcsőfok sorszám 0 , a következő 1 és így tovább. Ha mind a négy lány lábnyoma rajta van egy lépcsőfokon, akkor annak sorszám 0 -os többszöröse, azaz osztható 2 -vel, 3 -mal, 4 -gyel és 5 -tel, azaz ezek legkisebb közös többszörösével is, ami 60 . Viszont csak az első és az utolsó lépcsőfok ilyen, tehát az utolsó lépcsőfok sorszám 60 , így 61 lépcsőfokból áll a lépcső. Azokon a lépcsőfokokon van csak egy lábnyom, melyek sorszám 2 ; 3 ; 4 és 5 közül csak az egyikkel osztható. Ilyen számok 1 - 60 -ig: 2 ; 3 ; 5 ; 9 ; 14 ; 21 ; 22 ; 25 ; 26 ; 27 ; 33 ; 34 ; 35 ; 38 ; 39 ; 46 ; 51 ; 55 ; 57 és 58 . Tehát 20 olyan lépcsőfok van, melyen csak egy lábnyom található.

5. A kis barkácsolók versenyének döntőjében Peti és Pali azt a feladatot kapta, hogy állítsa össze az ábrának megfelelő 4x4 cm-es négyzetrácsot. Peti ehhez kapott 5db 8cm hosszúságú, míg Pali 8db 5 cm hosszúságú drótot. A drótok szabadon hajlíthatók, összeforrasztthatók, de elvágni vagy törni nem lehet őket. Meg tudja-e oldani Peti illetve Pali a feladatot? Ha igen, rajzolj le egy lehetséges megoldást! (8 pont)



Megoldás:

Ahol a négyzetrács vonalai befutnak az oldalakba, ott mindenképpen kell lennie legalább egy drótvégnek, mert itt 3 drótdarab találkozik, egynek tehát ebben a csomópontban véget kell érnie. Az ilyen pontok száma 12, tehát legalább 12 vég kellene a feladat megoldásához, azonban Petinek csak 10 drótvége van, így nem tudja megoldani a feladatot. Pali viszont meg tudja tenni (neki 16 drótvége van), egy lehetséges megoldás az ábrán látható.



6. Egy téglalap alakú papírlapból két egybevágó kört vágunk ki (a kivágott körök nem nyúlnak egymásba). Melyik egyenes mentén lehet szétvágni a papírt két egyenlő területű részre? (8 pont)

Megoldás:

Vegyünk két egyenlő sugarú kört. Ezek középpontosan szimmetrikusak, szimmetria-középpontjuk a körök középpontjait összekötő szakasz felezőpontja. Húzzunk a szimmetria-középponton át egy tetszőleges egyenest! Ha ez az egyenes nem metszi el a köröket, akkor az egyik kör az egyik oldalán, a másik kör a másik oldalán helyezkedik el. Ha elmetshi a köröket, akkor a szimmetria miatt a körökből levágott körszeletek egybevágók. Tehát mindkét esetben igaz, hogy a körökből ugyanakkora összterületű rész esik az egyenes egyik oldalára, mint a másikra. Vegyünk egy téglalapot. A téglalap középpontján átmenő egyenesek két egyforma területű részre vágják a téglalapot, mert a két rész a téglalap középpontjára szimmetrikus. A lyukas téglalap alakú papírlapon tehát azt az egyenest kell felvennünk, amely a téglalap szimmetria-középpontját köti össze a körök szimmetria-középpontjával. (Ha ez a két pont egybeesik, akkor az ezen a ponton átmenő tetszőleges egyenes megfelel.) Ez az egyenes felezi a téglalap területét és felezi „lyukak” összterületét, tehát felezi a maradék papírlap területét is.