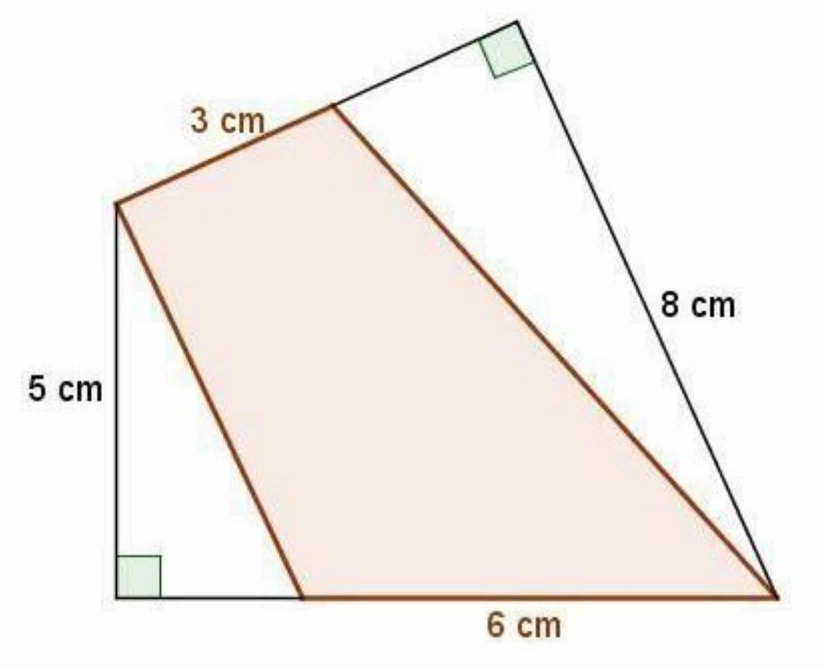
I. Geometria – klasszikus feladatok – csak egy vonal*

* jelölt „csak egy vonal” iskolánk spec. mat. tagozatának létrehozójának, Mikusi Imre tanár úrnak kedvelt szavajárása volt: zömében geometria feladatoknál használta segítségként….

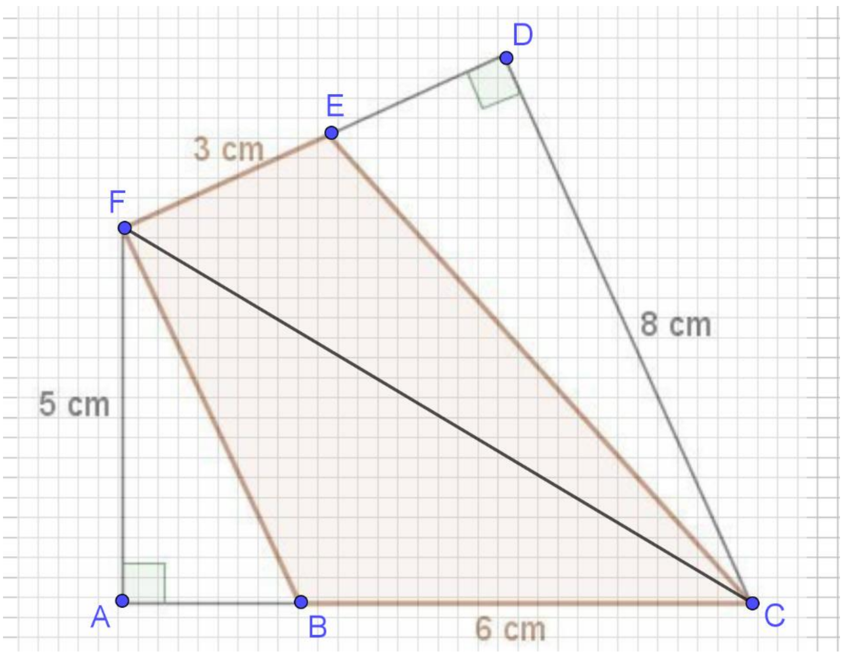


MINTAFELADAT:

Keressük a négyszög belsejében látható drapp négyszög területét!

Megoldás:

Mivel a nagyobb négyszög két-két oldala merőleges egymásra, ezért ha elnevezzük a csúcsokat és behúzzuk a „csak egy vonal”-at, *FC*-t



Az $FBC\Delta$ BC oldalához tartozómagasság az AF szakasz $\Longrightarrow$ $t_{FBC\Delta} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\ \text{cm}^2$

Az $CEF\Delta$ FE oldalához tartozómagasság az CD szakasz $\Longrightarrow$ $t_{CEF\Delta} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12\ \text{cm}^2$

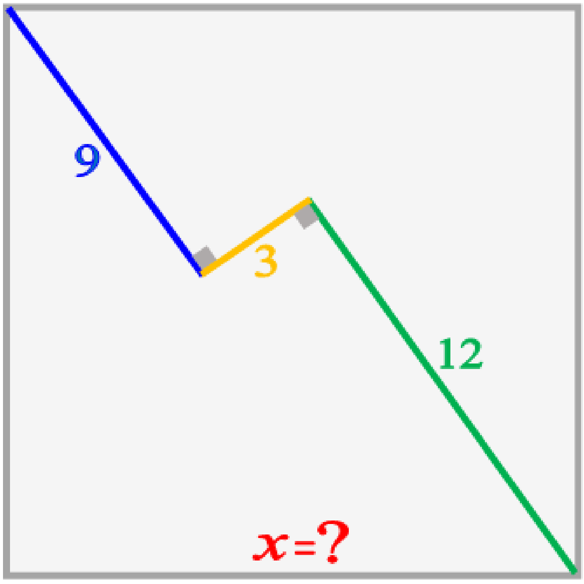
A kérdéses négyszög területe e kettő összege, tehát: $27\ \text{cm}^2$

Feladatok:

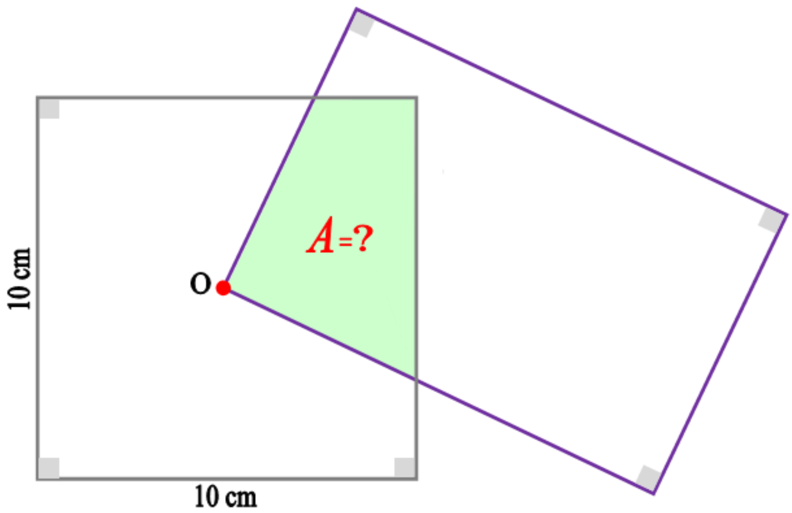
Minden feladatban egy terület nagyságot kérdezünk. Segít egy – két vonal behúzása.

a, c és d osztályosok feladatai:

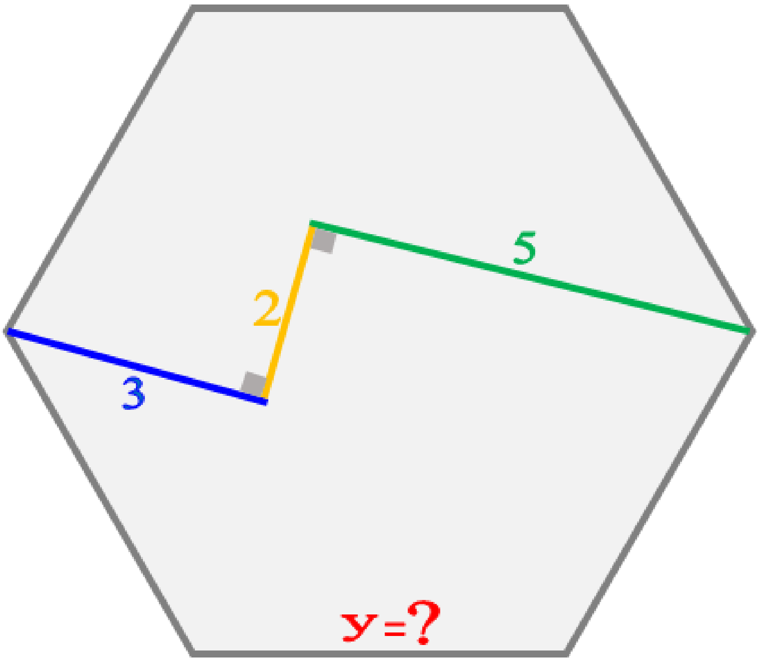
I./1) Mekkora a négyzet területe? (5p)



I./2) Mekkora területet vág ki a 10 cm oldalú négyzetből az ábrán látható téglalap, ha *O* pont a négyzet középpontja? (6p)



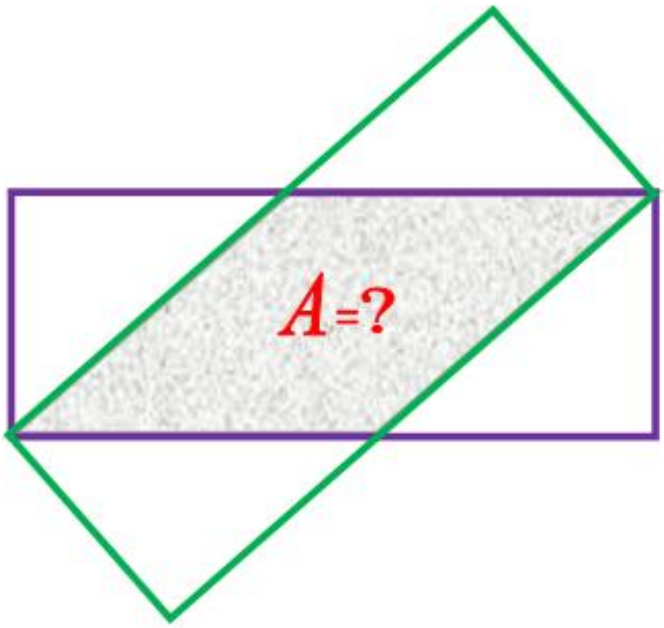
I./3) Mekkora a szabályos hatszög területe? (6p)



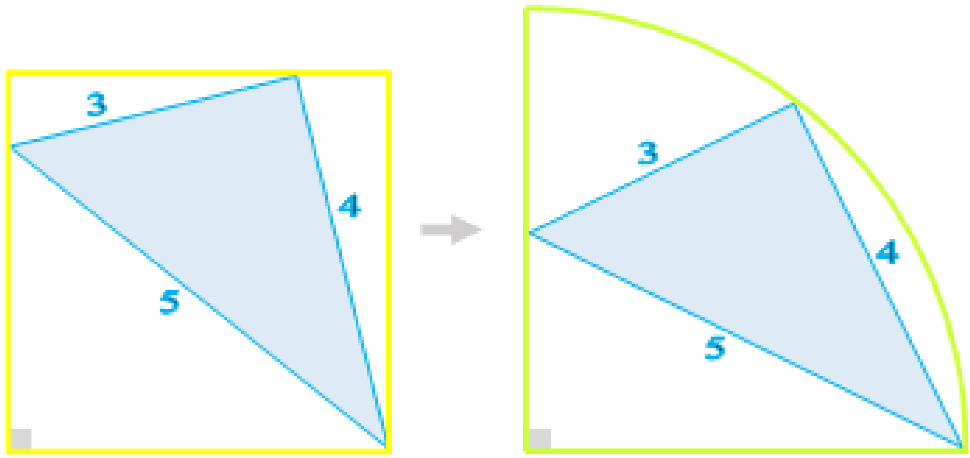
matematika tagozatosok feladatai:

Csak ha mindkét részből választottál feladatot, akkor kaphatod meg a maximális pontot!
A legjobb 4 feladat pontszámát regisztráljuk, de 3 tökéletesen megoldott, leírt feladatból is lehet 24 pontod!

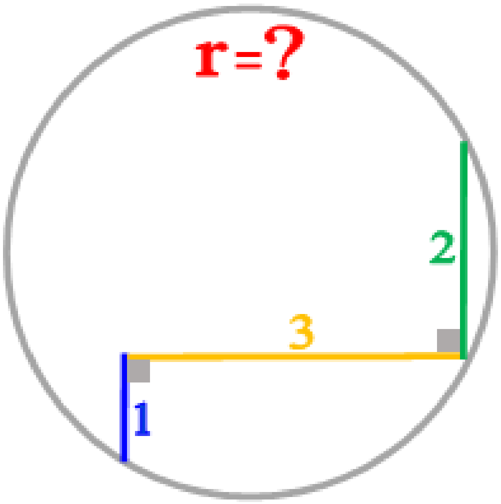
I./4) A téglalap hányad része a bejelölt *A* területű síkidom , ha az egybevágó téglalapok oldalainak aránya 1:3? (6p)



I./5) Melyik terület a nagyobb? A négyzeté, vagy a negyedköré? (8p)

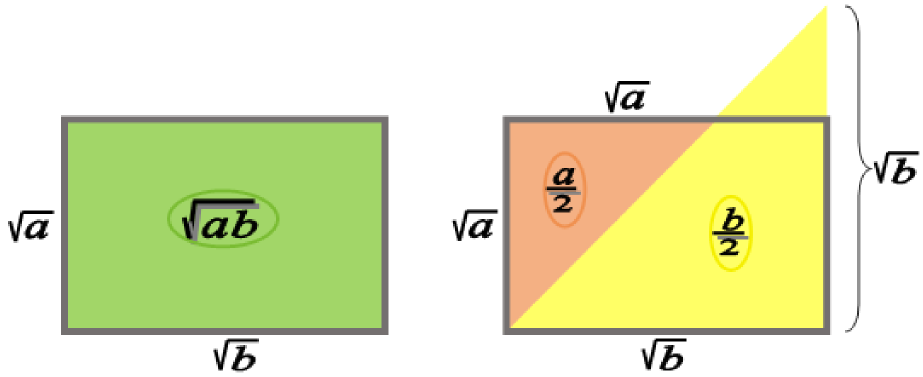


I./6) Mekkora a kör területe? (10p)



II. Geometria – algebra feladatok megoldásában

Mindenki ismeri, tanulta a számtani – mértani közepek egyenlőtlenségét (két pozitív számra) és annak mesés geometriai bizonyítását is többen láthatták. Többen ismerik ennek kibővítését: Harmonikus – Mértani – Számtani – Négyzetes egyenlőtlenség láncot és ennek is van gyönyörű geometriai bizonyítása.



$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

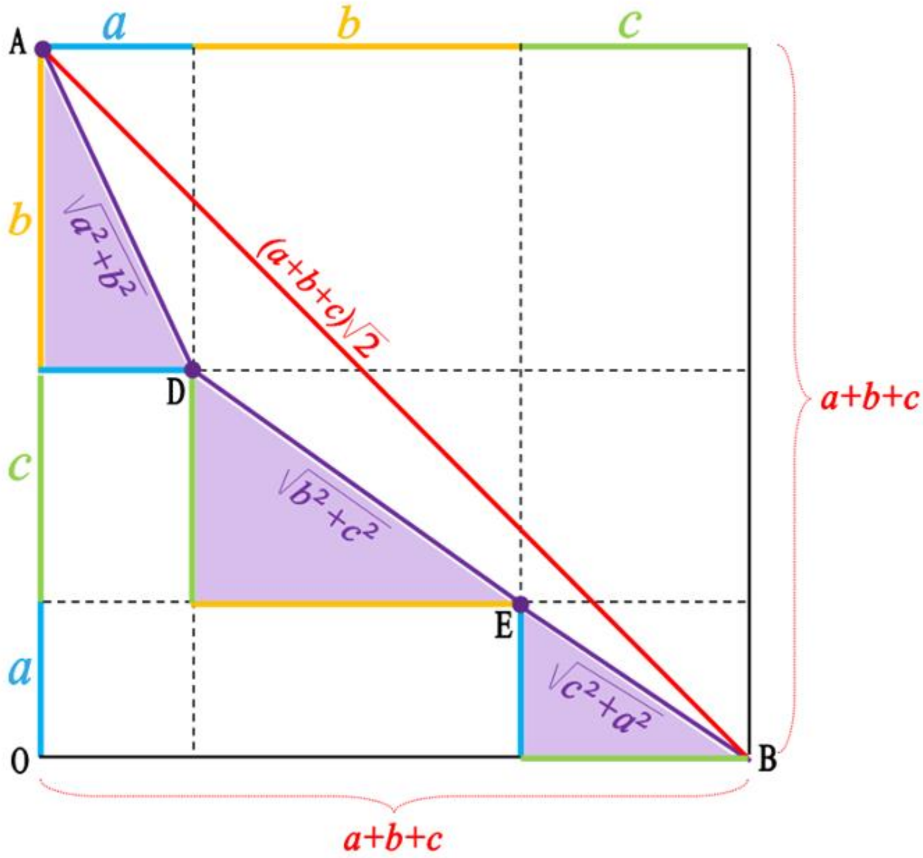
Egyenlőtlenségek megoldásában is használható a geometria, ennek szép példája a következő feladat is:

<u>MINTAFELADAT:</u>

Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenséget, ha $a; b; c \in \mathbb{R}_0^+$

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq (a+b+c)\sqrt{2}$$

MEGOLDÁS: Látványos – az ábráról leolvasható – „szinte” magyarázatot sem igényel: ha $a; b; c \in \mathbb{R}_0^+$, akkor felfoghatóak szakaszként:



Megoldás:

Rajzoljunk egy $a+b+c$ oldalú négyzetet, hiszen az egyenlőtlenség jobb oldala erre utal(hat)! Oldalait osszuk be az ábrán látható módon tetszőleges a, b és c szakaszokra. Ekkor Pithagorasz tétellel kiszámolt szakaszok alkotta törött vonal hossza hosszabb, mint a négyzet átlója. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha a törtvonal illeszkedik az átlóra, azaz a D és az E pont illeszkedik rá. Ez akkor következik be, ha $a=b$, $c=b$ és $a=c$. Ebből persze az következik, hogy egyenlőség, akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Feladatok:

Bizonyítandóak az alábbi egyenlőtlenségek, ahol minden betű nem negatív számot jelöl! Gondolkozz az előző mintafeladat alapján!

a, c és d osztályosok feladatai:

II./1) (5p)

$$\sqrt{b^2+(a+b)^2}+\sqrt{c^2+(a+c)^2}\geq(a+b+c)\sqrt{2}$$

II./2). (5p)

$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}\geq\sqrt{(x+y)^2+(a+b)^2}$$

II./3) (6p)

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\geq\sqrt{(a-y)^2+(b-x)^2}$$

matematika tagozatosok feladatai:

II./4) (6p)

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+y^2}\geq x+y$$

II./5) (8p)

$$a(1-d)+b(1-a)+c(1-b)+d(1-c)<2,\ \forall a,\ b,\ c,\ d\in(0,\ 1)$$

II./6) (10p)

$$a\left(\sqrt{3}-b\right)+c(1-a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+b(2-c)\cdot\frac{1}{2}\leq\sqrt{3}, \text{ ahol } 0\leq a\leq 1;\ 0\leq b\leq\sqrt{3}$$

és $0\leq c\leq 2$