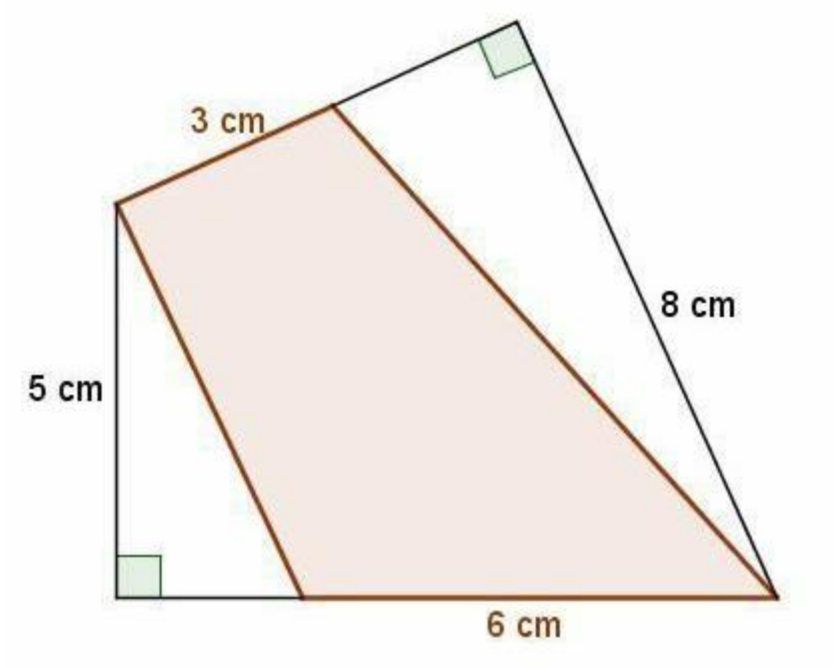
I. Geometria – klasszikus feladatok – csak egy vonal*

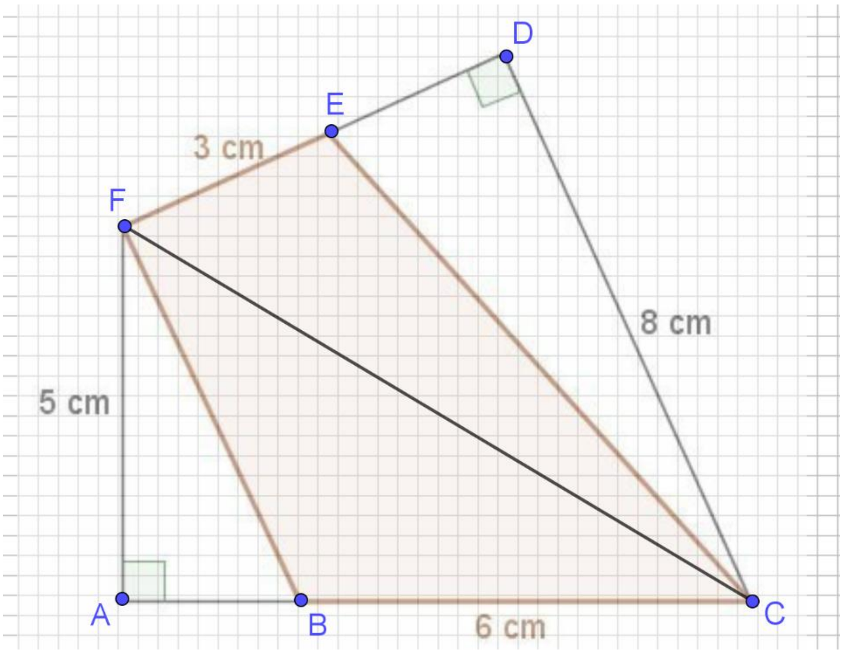
* jelölt „csak egy vonal" iskolánk spec. mat. tagozatának létrehozójának, Mikusi Imre tanár úrnak kedvelt szavajárása volt: geometria feladatoknál használta segítségként….



Keressük a négyszög belsejében látható drapp négyszög területét!

Megoldás:

Mivel a nagyobb négyszög két-két oldala merőleges egymásra, ezért ha elnevezzük a csúcsokat és behúzzuk a „csak egy vonal"-at, *FC*-t



Az $FBC\Delta$ BC oldalához tartozómagasság az AF szakasz $\Longrightarrow$ $t_{FBC\Delta} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ cm}^2$

Az $CEF\Delta$ FE oldalához tartozómagasság az CD szakasz $\Longrightarrow$ $t_{CEF\Delta} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12 \text{ cm}^2$

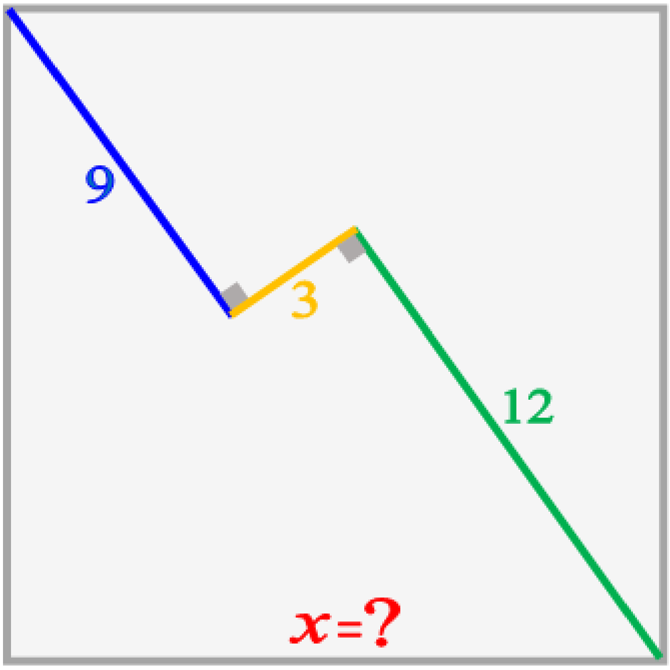
A kérdéses négyszög területe e kettő összege, tehát: 27 cm^2

Feladatok:

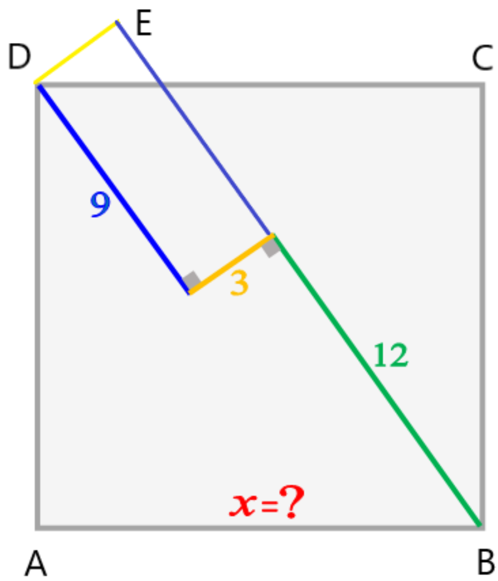
Minden feladatban egy terület nagyságot kérdezünk. Segít egy – két vonal behúzása.

I./1) – I./2) -es feladatot matematika tagozatosok nem választhatják!

I./1) Mekkora a négyzet területe? (5p)



MEGOLDÁS:



Berajzoljuk a két vonalat: Húzzunk párhuzamost a sárga és a kék szakasszal. Ekkor a DEB háromszög derékszögű és két befogója: $\mathrm{DE} = 3, \mathrm{EB} = 21$, míg az átfogója : $\mathrm{DB} = \sqrt{2} \cdot x$

Erre felírva a Pithagorasz tételt:

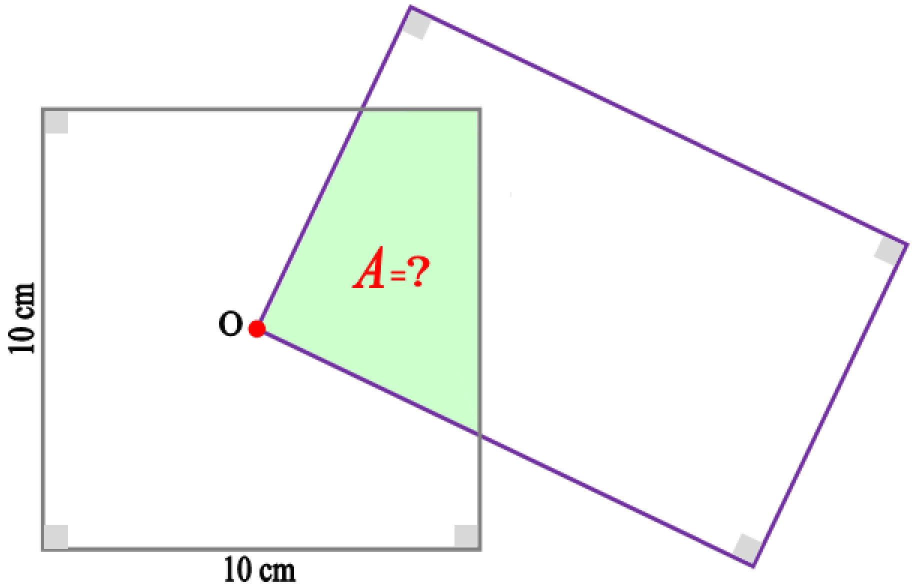
$$2x^2 = 3^2 + 21^2$$

Ebből a négyzet területe:

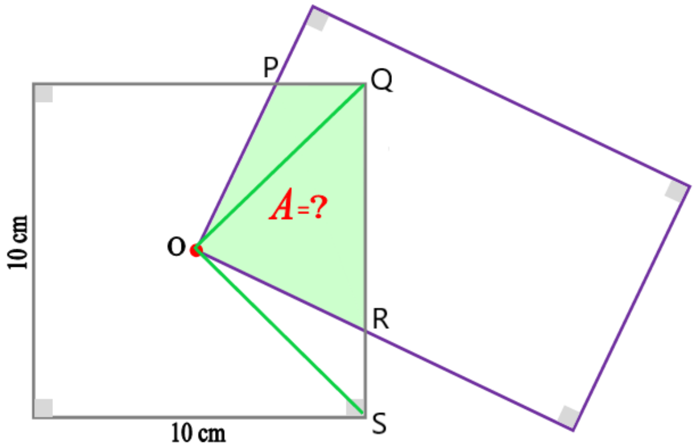
$$x^2 = 225 = 15^2$$

(a négyzet oldala $x = 15$)

I./2) Mekkora területet vág ki a 10 cm oldalú négyzetből az ábrán látható téglalap, ha *O* pont a négyzet középpontja? (6p)



MEGOLDÁS:



Behúzva a zöld szakaszokat látjuk, hogy az OP -90°-os elforgatottja O körül az OR szakasz, míg

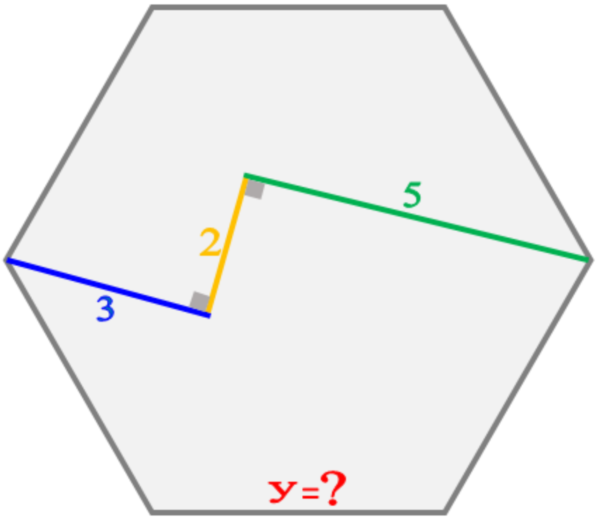
az OQ -90°-os elforgatottja O körül az OS szakasz.

Így az $OPQ\Delta \cong ORS\Delta$

Vagyis a keresett terület:

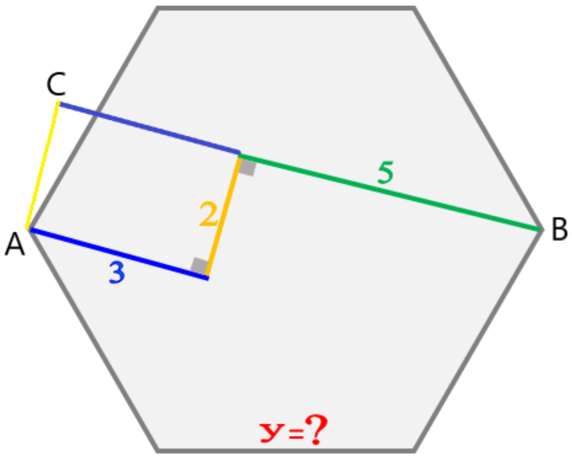
$$t_{ORQP} = t_{OSQ} = \frac{10 \cdot 10}{4} = 25cm^2$$

I./3) Mekkora a szabályos hatszög területe? (6p)



__MEGOLDÁS:__

Hasonlóan az előzőhöz:



berajzoljuk a sárga és a kék szakaszt, párhuzamosan a 2 és az 3 hosszú szakaszokkal, kapjuk az ABC derékszögű háromszöget.

Befogói: AC = 2, CB = 8

Átfogója a szabályos hatszög AB átlója, amelyről tudjuk, hogy kétszerese az oldalnak: AB = 2y

Pithagorasz tétellel:

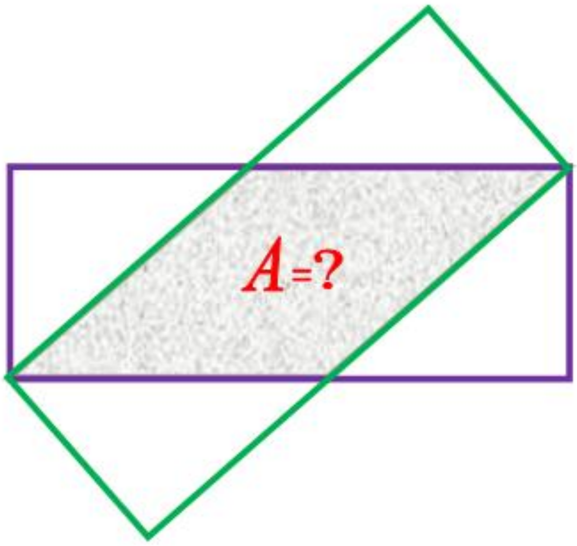
$$(2y)^2 = 4 + 64$$

$$y^2 = 17$$

Tudjuk, hogy a szabályos hatszög 6 egybevágó szabályos háromszögre bontható, melyeknek oldalai y hosszúak:

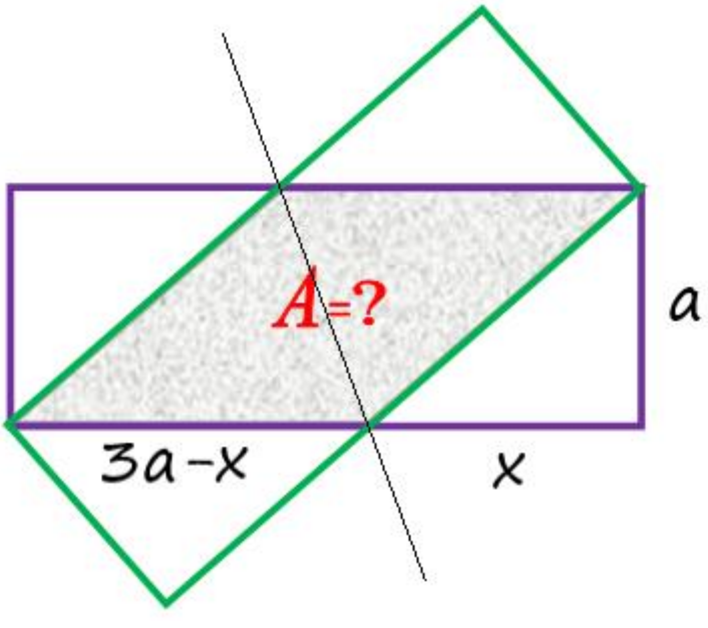
$$t_{hatszög} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot y^2}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 17}{2} = \frac{51\sqrt{3}}{2}$$

I./4) A=? , ha az egybevágó téglalapok oldalainak aránya 1:3 (6p)



MEGOLDÁS:

Húzzunk be egy egyenest és írjuk be a keletkezett oldalak nagyságát az ábrába, ha a téglalap oldalai a és $3a$ nagyságúak voltak:



A behúzott egyenesre tengelyesen szimmetrikus az ábra, így

az x és az a derékszöget bezáró szakaszok olyan derékszögű háromszöget alkotnak, melynek befogója $3a - x$.

x értékét Pithagorasz tétel segítségével számolhatjuk:

$$x^2 + a^2 = (3a - x)^2$$

a kapott egyenlet:

$$8a^2 - 6ax = 0$$

x-re rendezve: $x = \frac{4}{3}a$

A kérdéses paralelogramma területéhez kell a parallelogramma oldala:

$$3a - x = 3a - \frac{4}{3}a = \frac{5}{3}a$$

és magassága: a

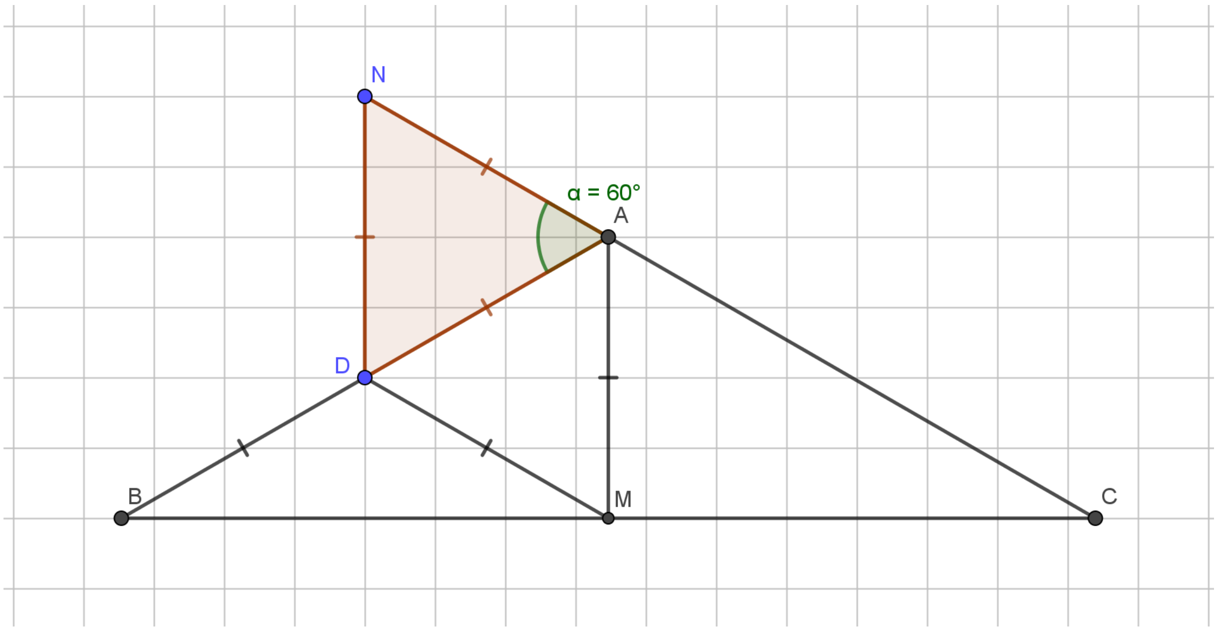
A terület tehát: $A = \frac{5}{3}a^2$

I./5) Az ABC egyenlőszárú háromszögben $\overline{AB} = \overline{AC}$. Legyen D az AB oldal felezőpontja. A háromszög A csúcsából induló magasságvonallal húzzunk párhuzamost D -n keresztül és jelöljük N -nel ennek a párhuzamosnak és az AC oldalegyenesnek a metszéspontját. Az így keletkezett ADN háromszög egyenlő oldalú. M legyen az A csúcsából induló magasság talppontja BC oldalegyenesen.

Igazold, hogy az $ANDM$ négyszög rombusz! És igazold, hogy $T_{ANDM} = \frac{T_{ABC}}{2}$!

(6p)

MEGOLDÁS:



A „csak egy vonal”-at behúzzuk: ez a DM szakasz.

Az ábra készítésekor látjuk - olvassuk, hogy az A csúcs külső szöge 60°, hiszen az AND háromszög egyenlő oldalú.

Az eredeti ABC háromszög szárszöge tehát 120°. Az AM magasság felezi ezt a szöget, az ABM háromszög 30°-60°-90°-os, melyben a behúzott DM szakasz súlyvonal, így az felezi ennek a háromszögnek a területét.

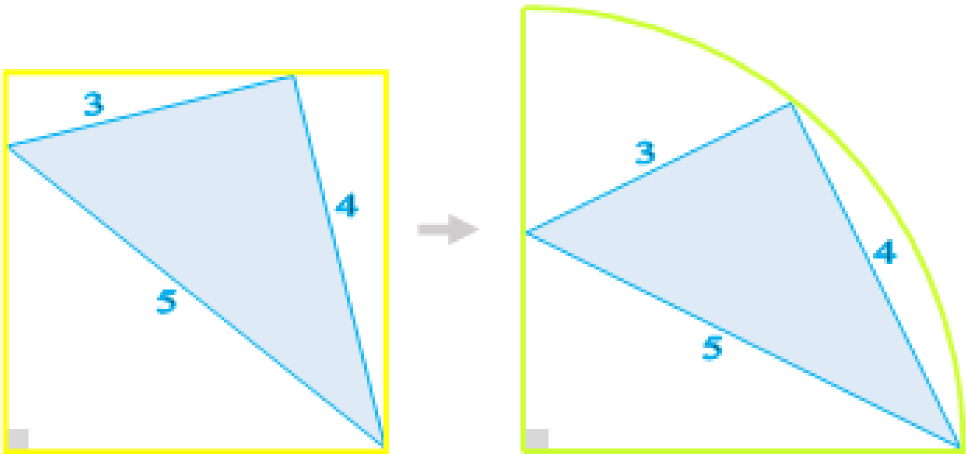
$t_{ADM} = t_{BMD} \implies 4 \cdot t_{ADM} = t_{ABC}$

A leírtak szerint az ABM derékszögű háromszög DM súlyvonalának hossza az AB átfogó hosszának fele (Thalesz tétel megfordítása), az AMD háromszög tehát egyenlő szárú (Thalest kör sugara) és az alapon nyugvó egyik szög 60°-os….

$\Longrightarrow AMD\Delta \cong AND\Delta$, oldalai (és egyik átlója) azonos hosszúságú, így ez egy rombusz, szögei 60°-120°-osak.

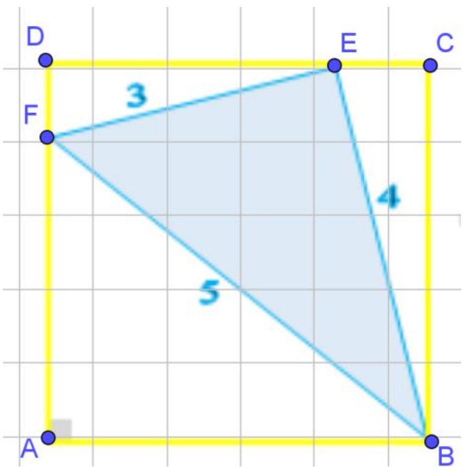
Az előbb bizonyítottak szerint a rombusz területe megegyezik az eredeti háromszög felének területével.

I./6) Melyik terület a nagyobb? A négyzeté, vagy a negyedköré? (8p)



MEGOLDÁS:

A 3; 4; 5 pithagoraszi számhármas, így egy derékszögű háromszög köré írt négyzet illetve negyedkör területét kell kiszámítanunk.



Legyen $AB = BC = a$

Ekkor $EC = \sqrt{16 - a^2}$, illetve

$$AF = \sqrt{25 - a^2}$$

Pithagorasz tétellel számolva.

Felírható az ABCD négyzet területének kétszerese (mert így egyszerűbb):

$$2a^2 = a\sqrt{16 - a^2} + a\sqrt{25 - a^2} + \left(a - \sqrt{16 - a^2}\right)\left(a - \sqrt{25 - a^2}\right) + 2 \cdot 12$$

Zárójelet felbontva, majd rendezve:

$$a^2 = \sqrt{16 - a^2}\sqrt{25 - a^2} + 12$$

12-őt kivonva mindkét oldalból és négyzetre emelve kapjuk:

$$a^2 - 12 = (16 - a^2)(25 - a^2)$$

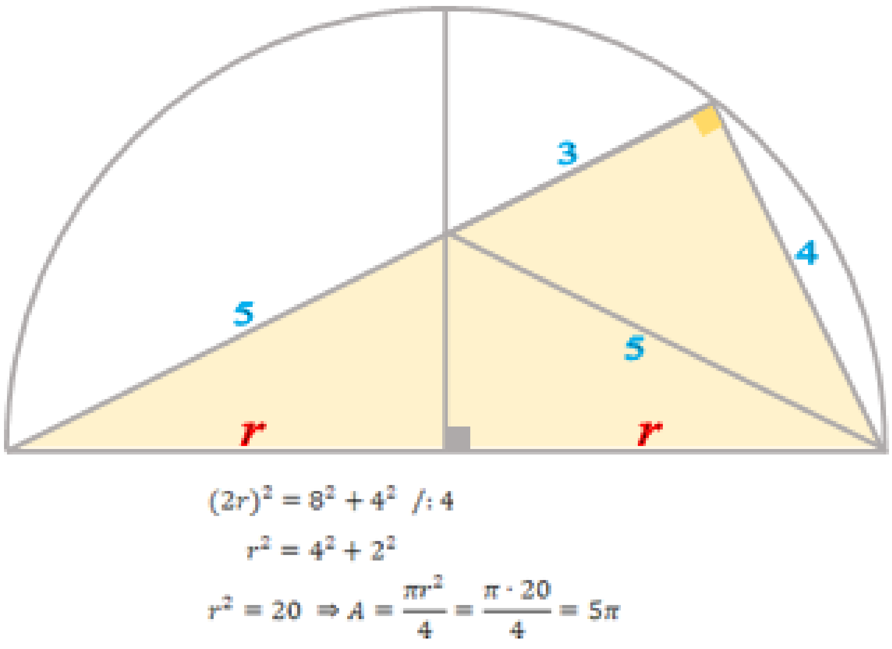
$$a^4 - 42a^2 + 412 = 0$$

$$a^2 = \frac{42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 412}}{2} = 21 \pm \sqrt{29}$$

A négyzet területe 25-nél kisebb kell legyen (az oldala 5-nél kisebb)

$$a^2 = 21 - \sqrt{29} \approx 15{,}61$$

A negyedkör sugarának kiszámításához: egy negyedkörrel kell kiegészíteni az ábrát:

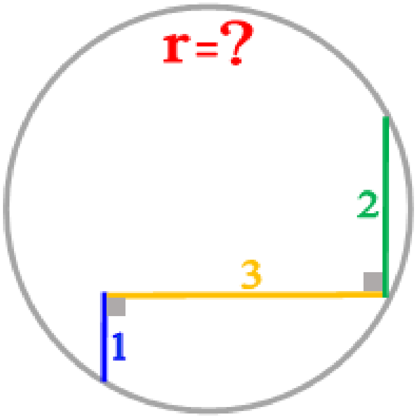


$$(2r)^2 = 8^2 + 4^2$$

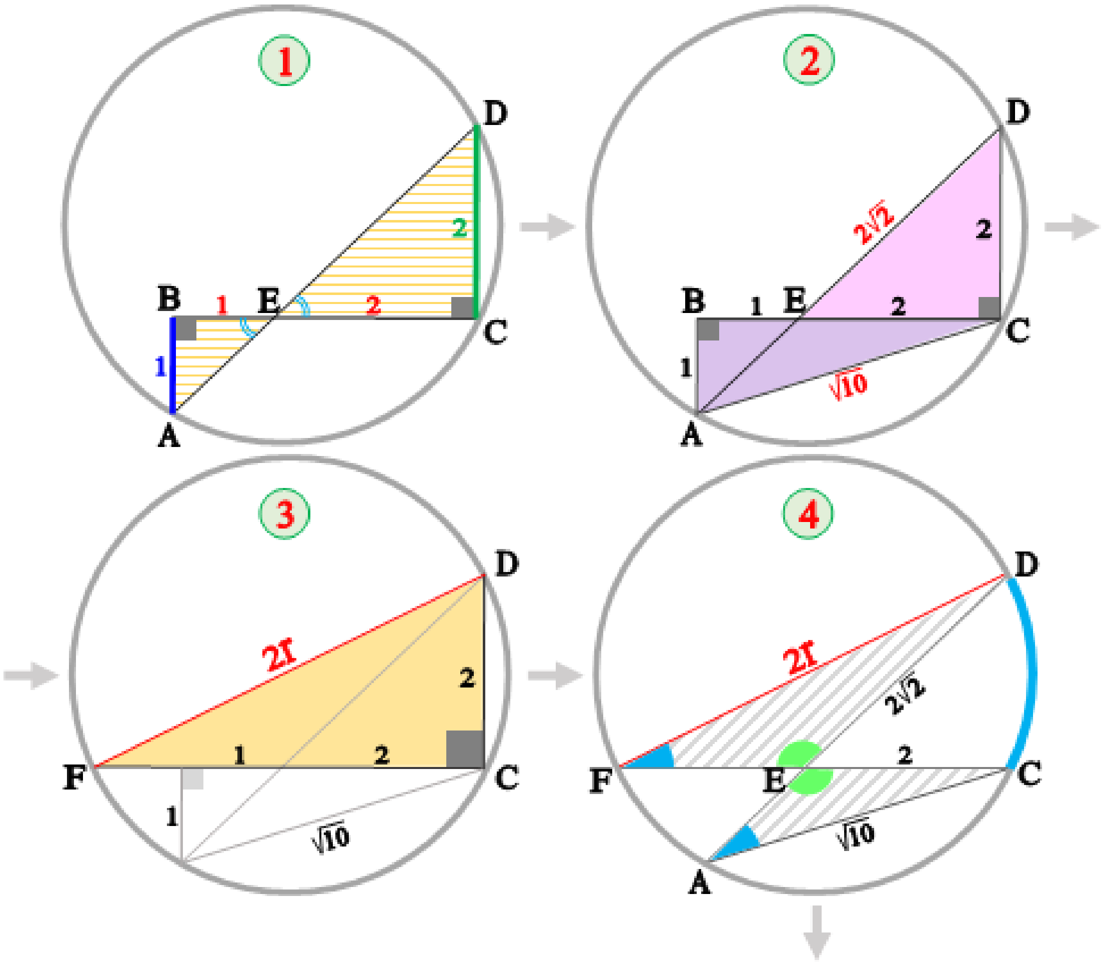
melyből $r^2 = 20$ és innen a negyedkör területe: $t = \frac{r^2\pi}{4} = 5\pi \approx 15{,}71$

Válasz: a negyedkör területe nagyobb, mint a négyzeté.

I./7) Mekkora a kör területe? (10p)



MEGOLDÁS:

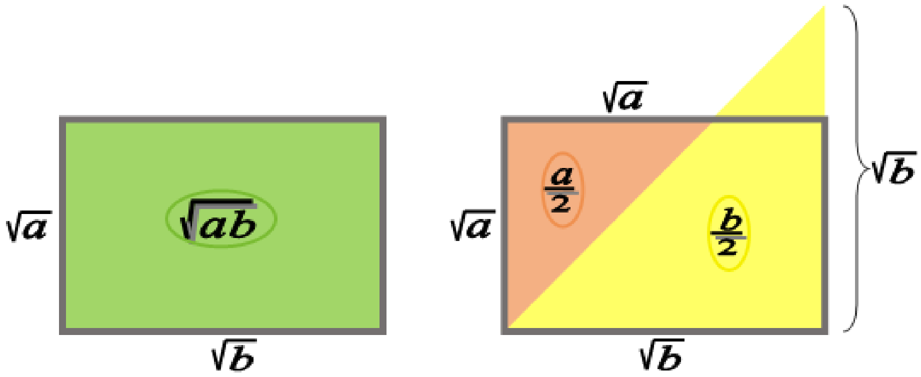


$$\frac{2r}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

A terület 5π

II. Geometria – algebra feladatok megoldásában

Mindenki ismeri, tanulta a számtani – mértani közepek egyenlőtlenségét (két pozitív számra) és annak mesés geometriai bizonyítását is többen láthatták. Többen ismerik ennek kibővítését: Harmonikus – Mértani – Számtani – Négyzetes egyenlőtlenség láncot és ennek is van gyönyörű mértani bizonyítása.



$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

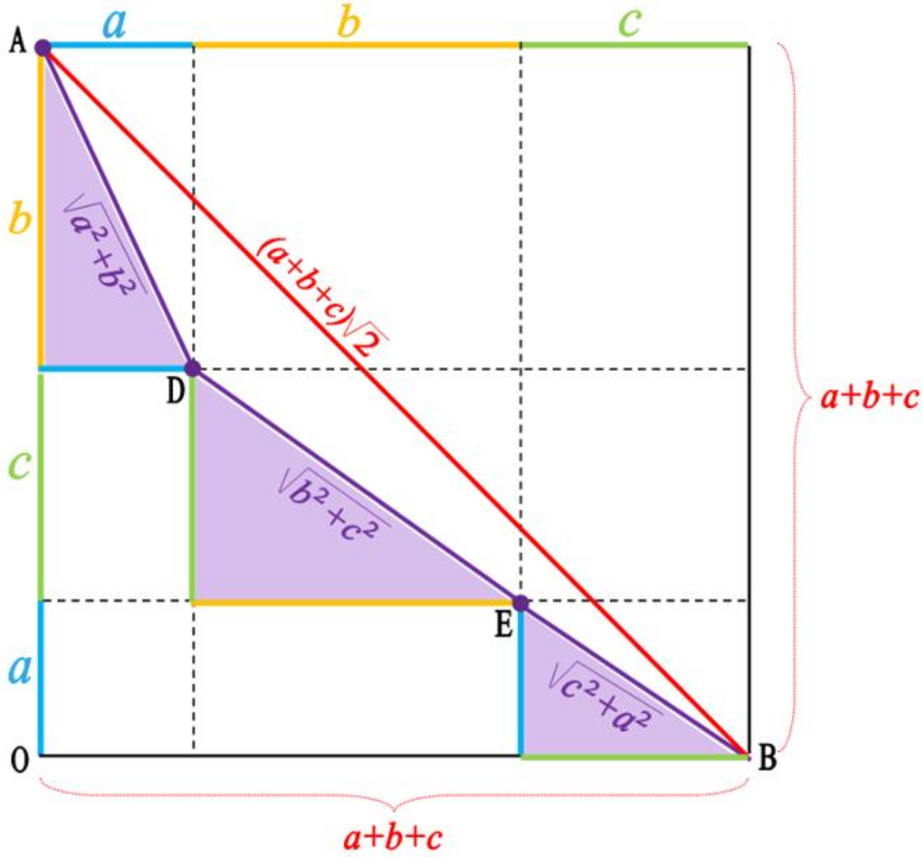
Egyenlőtlenségek megoldásában is használható a geometria, ennek szép példája a következő feladat is:

Minta feladat:

Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenséget, ha $a; b; c \in \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq (a+b+c)\sqrt{2}$$

MEGOLDÁS: Látványos – az ábráról leolvasható – szinte magyarázatot sem igényel:



(rajzoljunk egy $a + b + c$ oldalú négyzetet! Oldalait osszuk be az ábrán látható módon. Ekkor Pithagorasz tétellel kiszámolt szakaszok alkotta törött vonal hossza hosszabb, mint a négyzet átlója. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha a törtvonal illeszkedik az átlóra, azaz a D és az E pont illeszkedik rá. Ez akkor következik be, ha $a = b$, $c = b$ és $a = c$. Ebből persze az következik, hogy egyenlőség, akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$)

Feladatok:

Bizonyítandóak az alábbi egyenlőtlenségek, ahol minden betű pozitív számot jelöl! Gondolkozz az előző mintafeladat alapján!

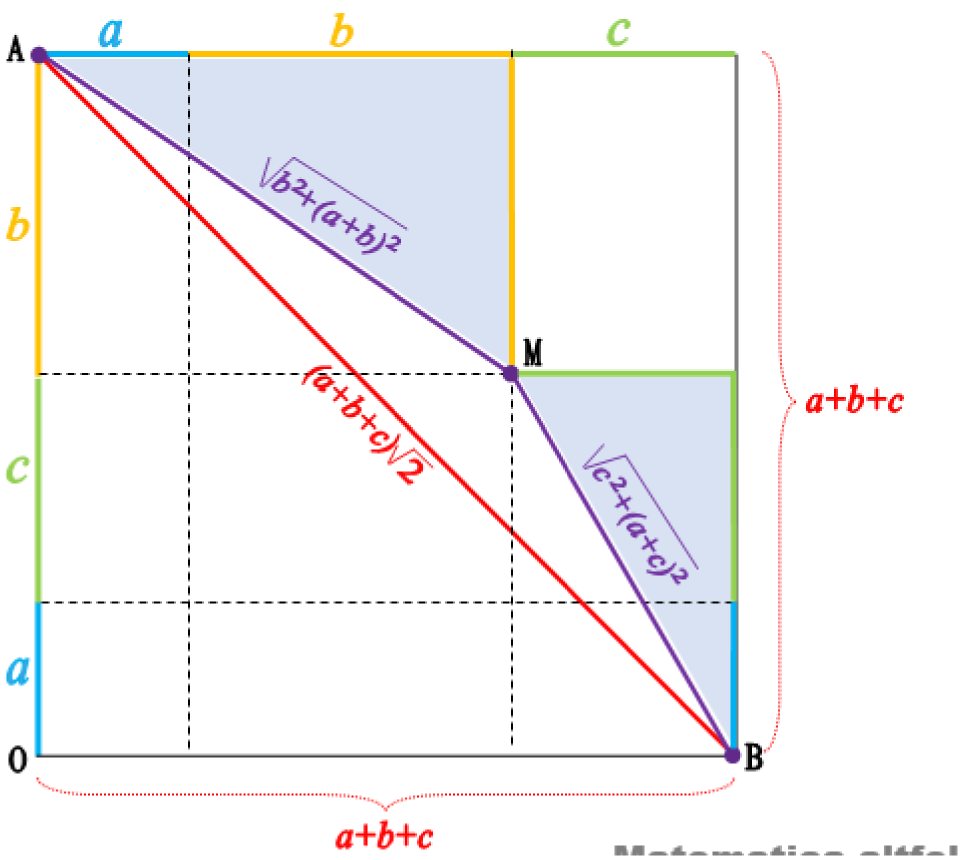
II./1) – II./2) -es feladatot matematika tagozatosok nem választhatják!

A megoldásokat leírás nélkül közöljük:

II./1) (5p)

$$\sqrt{b^2+(a+b)^2}+\sqrt{c^2+(a+c)^2}\geq(a+b+c)\sqrt{2}$$

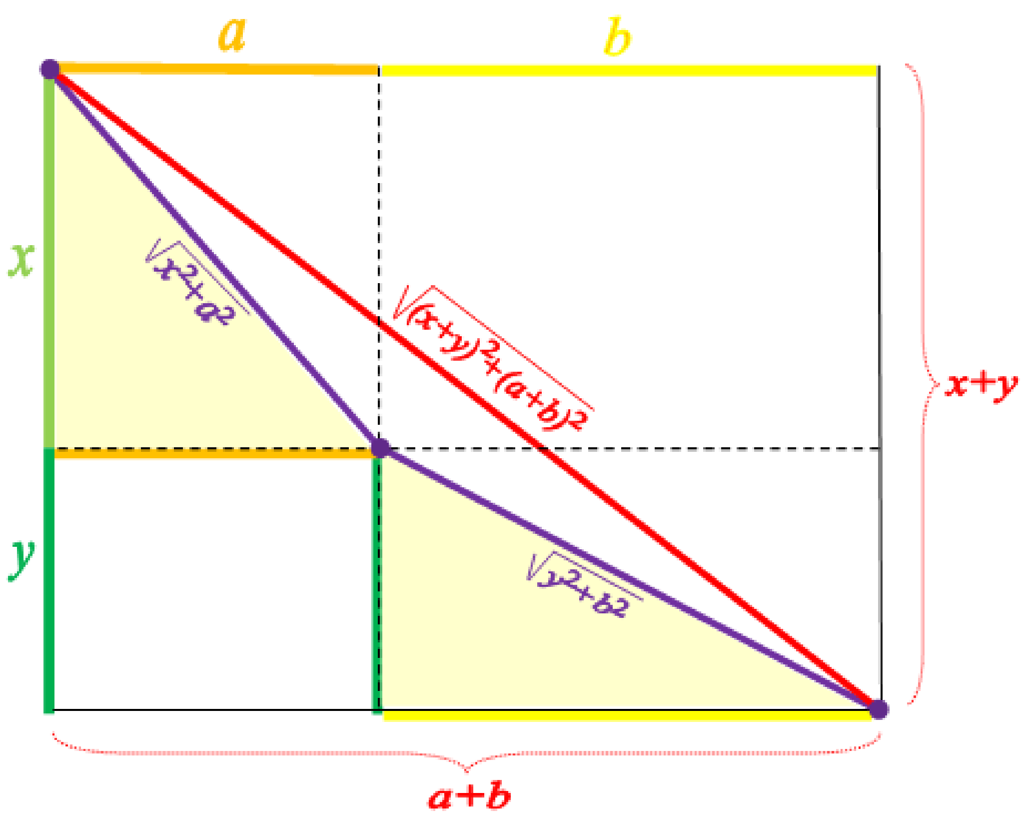
MEGOLDÁS:



II./2). (5p)

$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}\geq\sqrt{(x+y)^2+(a+b)^2}$$

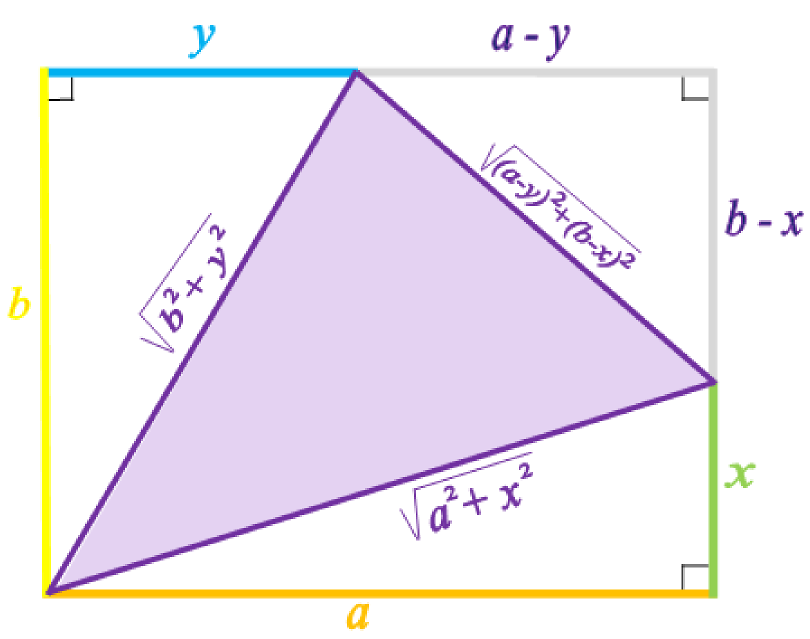
MEGOLDÁS:



II./3) (6p)

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\geq\sqrt{(a-y)^2+(b-x)^2}$$

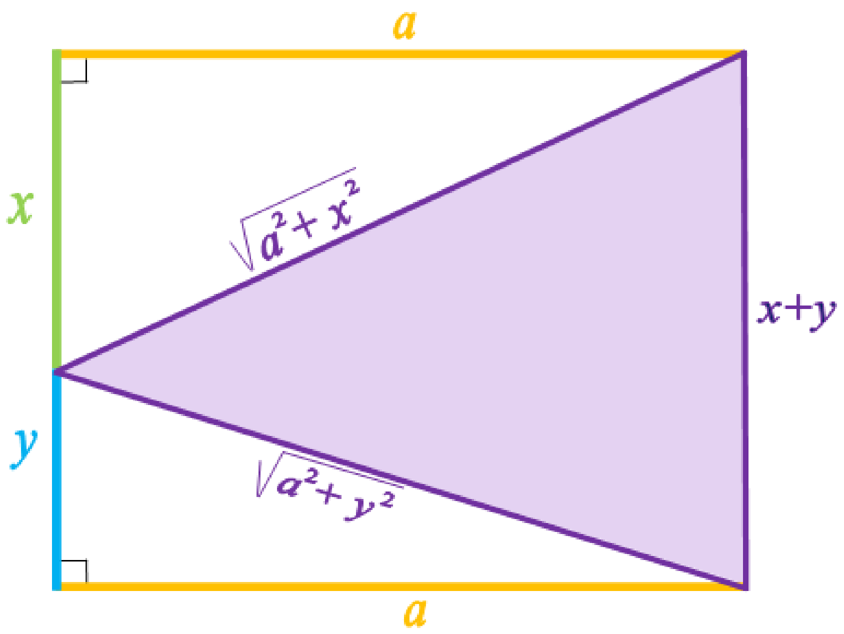
<u>MEGOLDÁS:</u>



II./4) (6p)

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+y^2}\geq x+y$$

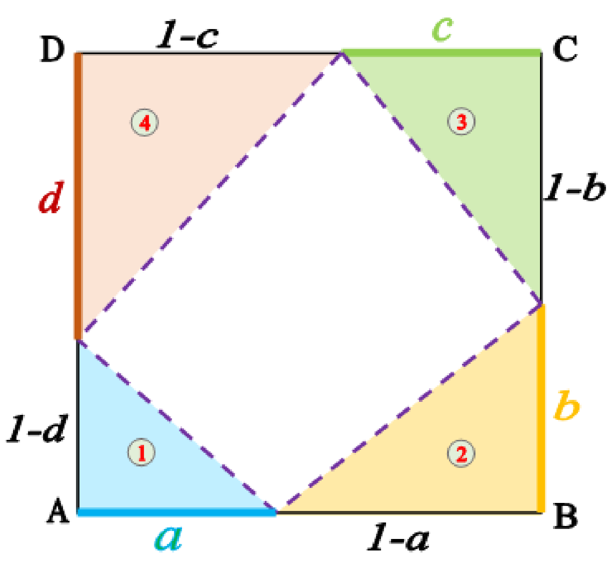
MEGOLDÁS:



II./5) (8p)

$$a(1-d)+b(1-a)+c(1-b)+d(1-c)<2,\ \forall a,\ b,\ c,\ d\in(0,\ 1)$$

MEGOLDÁS:

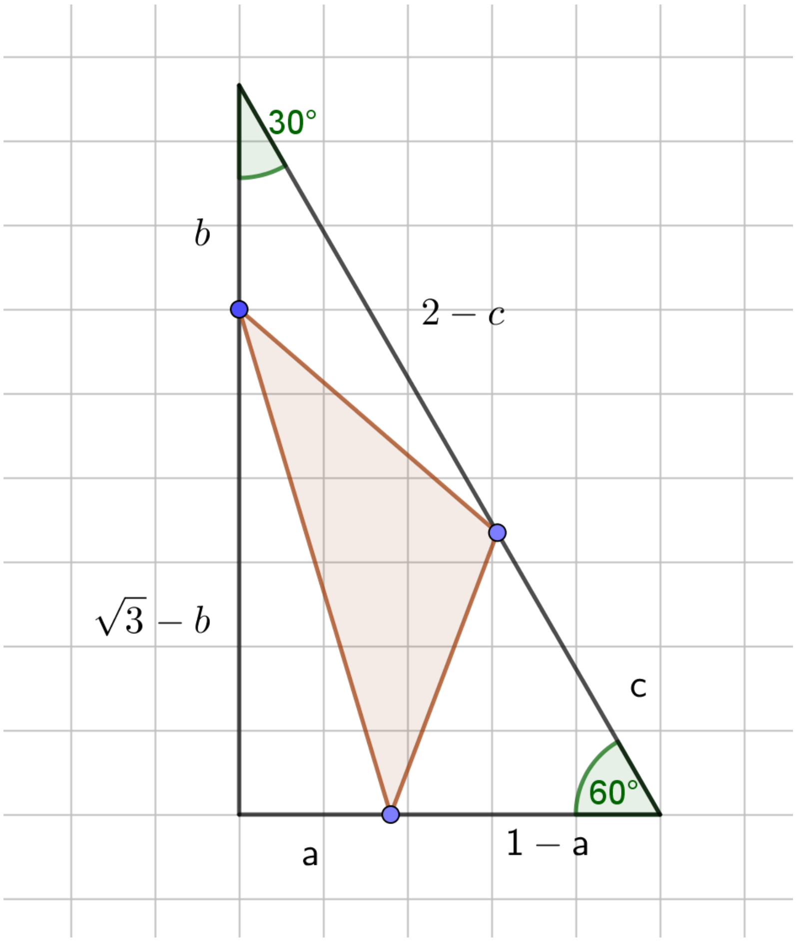


II./6) (10p)

$a(\sqrt{3}-b)+c(1-a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+b(2-c)\cdot\frac{1}{2}\leq\sqrt{3}$, ahol $0\leq a\leq 1$; $0\leq b\leq\sqrt{3}$

és $0\leq c\leq 2$

MEGOLDÁS:



A megoldáshoz itt a háromszög területének más képletét is alkalmazni kell,

$$terület=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$$

Az eredeti háromszög területe:

$$T=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}$$

A benne lévő 3 háromszög (kivéve a drapp középsőt) összterülete:

$$t_1+t_2+t_3=\frac{a(\sqrt{3}-b)}{2}+\frac{c(1-a)\cdot\sin 60°}{2}+\frac{b(2-c)\cdot\sin 30°}{2}$$

A drapp háromszög területe 0 vagy annál nagyobb, így igaz az egyenlőtlenség, hiszen

$$2 \cdot (t_1 + t_2 + t_3) \leq 2T$$