

Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny
2026. január 16.

A feladatok megoldása

1. feladat. Egy számsorozat első tagja 9994. A sorozat további tagjait úgy képezzük, hogy az előző tag számjegyeinek összegét megszorozzuk öttel és még hozzáadunk kettőt.

a) Írd fel a sorozat második tagját!

b) Mennyi a sorozat 2026. tagja?

(6 pont)

Megoldás:

A 9994 szám számjegyeivel elvégezzük a szükséges műveleteket:

$$9 + 9 + 9 + 4 = 31, 31 \cdot 5 = 155, 155 + 2 = 157.$$

Tehát a sorozat második tagja 157.

2 pont

A sorozat harmadik tagja: $(1 + 5 + 7) \cdot 5 + 2 = 67$.

1 pont

A sorozat negyedik tagja: $(6 + 7) \cdot 5 + 2 = 67$.

1 pont

A sorozat harmadik tagjától kezdve minden további tag 67 lesz, mert ugyanazokat a műveleteket végezzük el, tehát a 2026. tag is 67 lesz.

2 pont

Összesen: 6 pont

2. feladat. Az iskolai matekversenyen minden osztályból egy olyan háromtagú csapat indulhat, amelyben legalább két lány van. A 6.C osztályból jelentkezett négy lány: Anna, Bea, Csilla és Dorina, és két fiú: Zalán és Xavér. Hányféleképpen állhat össze az induló csapat?

(8 pont)

Megoldás:

Két eset lehetséges: 3 lány van a csapatban, vagy 1 fiú és 2 lány.

1 pont

Az első esetben a 4 lányból 3-at négyféleképpen tudunk kiválasztani,

1 pont

ugyanis ennyiféleképp választhatjuk ki, hogy melyikük marad ki a csapatból

1 pont

A második esetben a 2 lányt hatféleképp választhatjuk ki,

1 pont

ugyanis választunk egy "első" lányt és egy "második" lányt. Ezt $4 \cdot 3$ féleképp tehetjük meg, de a végeredményben nem számít a lányok sorrendje, tehát 2-vel le kell osztani.

2 pont*

A 2 fiú közül 1-et kell választani, ezt kétféleképp tehetjük meg.

1 pont

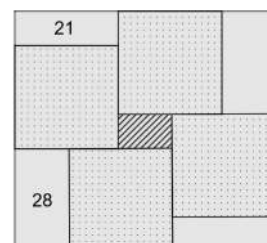
Vagyis összesen $4 + 6 \cdot 2 = 16$ eset van

1 pont

Megjegyzés: A csillaggal jelölt 2 pontot akkor is megkapja a versenyző, ha a 6 esetet úgy számolja össze, hogy az első lány mellé másik 3-at, a második mellé már csak 2-t, a harmadik mellé 1-et választhatunk ki.

Összesen: 8 pont

3. feladat. Négy egyforma négyzetet az ábrán látható módon összeillesztettünk. A keletkezett téglalapok közül kettőnek a négyzetméterben mért területét megadtuk az ábrán. Mekkora a középén található vonalkázott téglalap területe, ha a téglalapok oldalai méterben mérve egész számok? (Az ábra nem arányos.)



(9 pont)

Megoldás:

A négyzet oldalának hossza osztója 21-nek is és 28-nak is. 1 pont

Ebből következik, hogy vagy 7, vagy 14 m hosszú a négyzet oldala. 1 pont

Utóbbi esetben nem lehetne összeilleszteni őket az ábrának megfelelően, tehát a négyzet oldala 7 m. 1 pont

A téglalapok másik oldalai 3 és 4 m hosszúak. 1 pont

A vonalkázott téglalap függőleges oldala ugyanakkora, mint a 21 m^2 területű téglalap függőleges oldala, mivel a legnagyobb téglalap függőleges oldalának hosszából a négyzet oldalosszának kétszeresét kivonva megkapjuk mindkettőt. 2 pont

Hasonló érveléssel látszik, hogy a vízszintes oldal hossza megegyezik a 28 m^2 területű téglalap vízszintes oldalának hosszával. 2 pont

Tehát a vonalkázott téglalap oldalai 3 m és 4 m, vagyis a területe 12 m^2 . 1 pont

Összesen: 9 pont

4. feladat. Sári gyűjti a matricákat. A füzetébe már beragasztotta a matricák $\frac{3}{4}$ részét és még 7 darabot. Hátravan még a matricák $\frac{1}{5}$ részénél 2-vel kevesebb matrica beragasztása. Hány matricája van Sárinak? **(10 pont)**

Megoldás:

Mivel Sári a matricák $\frac{3}{4}$ részénél 7-tel több darabot ragasztott be, ezért az összes matrica $\frac{1}{4}$ részénél 7-tel kevesebb maradt meg. 1 pont

A megmaradt matricák számához 7-et adva tehát az összes matricák negyedét kapjuk. 1 pont

Azt is tudjuk, hogy a még be nem ragasztottak darabszámához 2-t hozzáadva az összes matrica $\frac{1}{5}$ -ét kapjuk. 2 pont

Tehát a matricák $\frac{1}{4}$ része és $\frac{1}{5}$ része közötti különbség éppen $7 - 2 = 5$ darab matrica. 2 pont

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$
 2 pont

Az összes matrica $\frac{1}{20}$ része 5 darab, vagyis összesen 100 matricája van Sárinak. 2 pont

Megjegyzés: Ha a diák szakaszokkal ábrázolja a matricák darabszámát, és az ábra alapján helyes számításokkal helyes következtetésekre jut, akkor kapja meg a maximális 10 pontot.

Összesen: 10 pont

5. feladat. 64 darab egyforma kis kockából összeragasztottunk egy nagy kockát, és az így keletkezett nagy kockának mind a hat lapját befestettük pirosra. El tudunk-e venni

- a) 2;
- b) 6;
- c) 10;
- d) 15 darab - piros lappal is rendelkező - kis kockát úgy, hogy a maradék test felszíne ugyanakkora maradjon, mint az eredeti kockáé? Ha igen, hogyan?

(13 pont)

Megoldás:

(Nem változik a test felszíne, ha egy olyan téglatestet veszünk el, aminek pontosan egy közös csúcsa van a kockával, ennek megfelelően az oldalhossza kisebb a kockáénál. Ugyanis minden elvett lap helyett megjelenik a felszínen a téglatest szemközti lapja.)

- a) Egy csúcsnál elvehetünk egy $1 \times 1 \times 2$ -es téglatestet.

Vagy: két csúcsnál elvehetünk 1-1 kockát. (Elég az egyiket leírni vagy lerajzolni.)

2 pont

- b) Egy csúcsnál elvehetünk egy $1 \times 3 \times 2$ -as téglatestet.

Vagy: két csúcsnál elvehetünk egy-egy $1 \times 1 \times 3$ -as téglatestet, amik egymáshoz nem érintkeznek lappal.

Vagy: három csúcsnál elvehetünk egy-egy $1 \times 1 \times 2$ -es téglatestet, amik nem érintkeznek lappal.

Vagy: hat csúcsnál elvehetünk 1-1 kockát.

Stb. (Minden jó konstrukció elfogadható.)

3 pont

- c) Egy csúcsnál elvehetünk egy $1 \times 3 \times 3$ -as téglatestet, és egy másikon egy kockát, úgy, hogy ne érintkezzenek lappal.

Vagy: öt csúcsnál elvehetünk egy-egy $1 \times 1 \times 2$ -es téglatestet, amik nem érnek össze.

Stb. (Fontos annak a megmutatása/lerajzolása, hogy megoldható, hogy a testeknek nincs közös lapja.)

4 pont

- d) Egy csúcsnál elvehetünk egy $1 \times 3 \times 3$ -as téglatestet, és egy másikon egy $1 \times 3 \times 2$ -es téglatestet, úgy, hogy ne érintkezzenek lappal. Pl. egymással párhuzamos lapokról vesszük el.

Vagy: két párhuzamos lap egyikén elveszünk a szemközti csúcsoknál egy-egy $1 \times 2 \times 2$ -es, a másikon egy $1 \times 2 \times 2$ -es és egy $1 \times 1 \times 3$ -as téglatestet.

Vagy: két lapon egy-egy $1 \times 2 \times 3$ -as, és egy velük lappal nem érintkező $1 \times 1 \times 3$ -as téglatestet veszünk el.

Stb.

4 pont

Összesen: 13 pont

6. feladat. Két pozitív egész szám összege 2026. Ha a nagyobbat megfelezzük, és a kisebbet megduplázzuk, akkor a két új szám összege 2027 lesz. Mik lehettek az eredeti számok?

(14 pont)

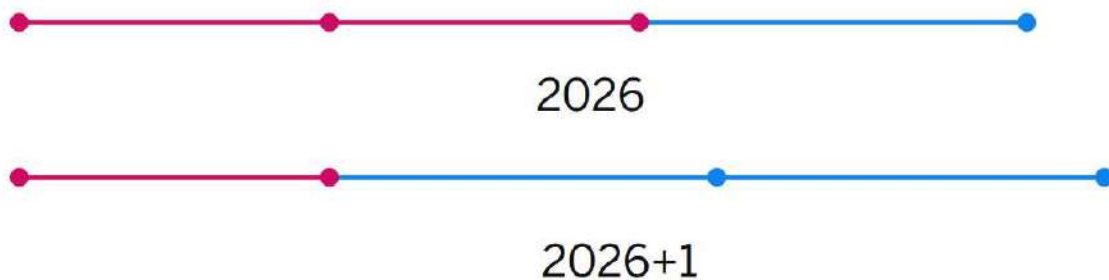
Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladathoz! Legyen két egyforma piros szakasz a nagyobb szám, mert azt a későbbiekben meg fogjuk felezni, a kék szakasz pedig legyen a kisebb szám.



2 pont

Rajzoljuk le, hogy mi történik, miután a nagyobb számot megfelezzük és a kisebb számot megduplázzuk, azaz egy piros szakaszt kékre cserélünk.



1 pont

A kisebb szám eggyel nagyobb, mint a nagyobb szám fele.



2 pont

Ha a nagyobb szám felére cseréljük ki a kisebb számot, akkor az érték 1-gyel csökken.



2 pont

2025 a nagyobb szám felének a háromszorosa.

2 pont

A nagyobb szám fele: $2025 : 3 = 675$

1 pont

A nagyobb szám: $675 \cdot 2 = 1350$

2 pont

A kisebb szám ekkor: $2026 - 1350 = 676$

2 pont

Megjegyzés: ha a versenyző próbálgatással rátalál a megfelelő számpárra, de nem indokolja a megoldását, és azt sem, hogy csak ez az egyetlen megoldás létezik, akkor legfeljebb 5 pontot kap, 2-2 pontot a két szám megtalálására és 1 pontot a feltételek ellenőrzésére.

Összesen: 14 pont

Maximális pontszám: 60 pont